

關於中國古代籌算捷法和珠算中 留頭乘的幾個問題

牛騰 鄒大海*

摘要

留頭乘是元代以來籌算捷法和珠算中乘法計算的常用方法。前人對留頭乘的口訣和歷史曾有同異互見的闡釋，留下一些疑難問題。本文對古代留頭乘的方法和表達方式進行了重新梳理，通過仔細分析古算書中關於留頭乘的說明、口訣和例題，證明李培業等關於《算學啟蒙》中留頭乘口訣的解釋是正確的，而潘逢禧等人的解釋不符合口訣的本意。本文還證明《九章算法比類大全》等算書中「乘法」的說明與口訣並不矛盾，只是元明算書的例題有的與之吻合，有的與之不吻合；這些反映了古代算書編輯的複雜性。本文指出，《九章算法比類大全》中關於留頭乘的內容具有更早的淵源，《數學通軌》中有關留頭乘的內容並不直接源於《詳明算法》。

關鍵詞：留頭乘、新解釋、《算學啟蒙》、《九章算法比類大全》、《數學通軌》、《詳明算法》

2019年11月9日收稿，2020年6月29日修訂完成，2021年1月20日通過刊登。

* 作者分別係中國財政科學研究院博士後科研流動站博士後、中國科學院自然科學史研究所研究員。

一、前言

乘法是實用計算中極為常用又有一定難度的運算，一旦數目較大就顯得有些繁瑣且容易出錯。因此，唐代中葉以來對乘法的改進成為實用計算技術發展的一個重要方面，留頭乘法就是其中一項重要的成就。它曾是中國古代籌算快捷算法和珠算算法中最主要的乘法運算方法，甚至在有的算書中它還是唯一的乘法計算方法，受到中算家特別是珠算家的特別重視。大概因為這個緣故，有的算書亦稱之為「乘法」。不少涉及珠算的著作或文章中都介紹了留頭乘的出處和運算順序，¹有的學者對《算學啓蒙》中留頭乘的口訣或布數方式進行過簡單探討，²山崎與右衛門等《珠算算法的歷史》³對包括留頭乘（他們稱為「中乘法」）在內的乘法的歷史，從不同方面進行了或詳或略的說明，華印椿《中國珠算史稿》⁴對留頭乘歷史的諸多方面做了比較全面的闡述。但是對留頭乘的口訣及其說明、留

-
- 1 李迪稱《盤珠算法》中的「乘法」口訣引自《九章比類》，這是不準確的。因為兩書中「乘法」口訣的第一句分別作「乘法之數此為真」和「下乘之法此為真」，並不相同。另外，李先生談到留頭乘的運算順序時說「其算法是以被乘數的首位去乘乘數的各位，……」，這也是錯誤的，實際上該算法是從被乘數的末位開始算起的。詳見李迪，《中國數學通史·明清卷》（南京：江蘇教育出版社，2004），頁 63。另外，李儼、梅榮照、郭書春等也有所介紹，詳見李儼，《中國算學史》（北京：商務印書館，1955），頁 168-169；梅榮照，〈唐中期到元末的實用算術〉，收入錢寶琮主編，《宋元數學史論文集》（北京：科學出版社，1966），頁 10-35；郭書春主編，《中國科學技術史·數學卷》（北京：科學出版社，2010），頁 404。
 - 2 相關論述見朱希安、葉宗義主編，《當代中國珠算》（北京：中國財經出版社，2000），頁 50、157；清·潘逢禧，《算學發蒙》（逸叟叢，1882）；李培業，《中國珠算簡史》（北京：中國財政經濟出版社，2007），頁 46；勞漢生，《珠算與實用算術》（石家莊：河北科學技術出版社，2000），頁 42；張德和，〈珠算的加減和口訣及其內在機制——「再領風騷數百年」續篇〉，《上海珠算心算》225(2011.1)：6-44；（日）建部賢弘，《新編算學啓蒙諺解》，收入（日）淺見惠、安田健訊編，《日本科學技術古典籍資料·數學篇（2）》（東京：科學書院，2001），頁 725。
 - 3 （日）山崎與右衛門、戶谷清一、鈴木久男，《珠算算法の歷史》（東京：森北出版株式會社，1958），頁 101-102、92-151。
 - 4 華印椿，《中國珠算史稿》（北京：中國財政經濟出版社，1987），頁 153-164。

頭乘的源流等問題進行具體解釋或探討的卻寥寥無幾，有的雖有解釋和說明但仍存在不少問題。本文試圖從新的角度梳理和研究關於留頭乘的原始文獻，澄清以往研究中存在的一些關於算法和文獻源流關係的疑難問題，重新探討其學術源流，這對中國古代數學史特別是珠算史的研究具有重要的學術意義。

二、留頭乘及相關概念的含義

為便於論述，我們首先對與留頭乘有關的幾個基本概念做一簡介。

珠算和一些籌算捷法中的乘法，均可區分為「上乘(法)」和「下乘(法)」兩類。不論籌算還是珠算，「上乘(法)」是先用乘數各位依次乘被乘數的首位、次位、次次位、……直至末位，每次的乘積都放在被乘數的前面。因為從被乘數的首位乘起，相應的積放在被乘數的前面，所以又叫「前乘(法)」。「下乘(法)」是指乘數各位依次乘被乘數的末位、次末位、次次末位、……直至首位，每次的乘積放在被乘數的後面。因為從被乘數的末位乘起，相應的積放在被乘數的後面，所以又叫「後乘(法)」。「下乘(法)」又有留頭乘、破頭乘、掉尾乘和隔位乘四種。根據本文討論的需要，這裡主要介紹掉尾乘和留頭乘。

在下乘法中，如果乘數乘被乘數的每一位時，都採用乘數各位從其末位開始依次到首位的順序進行，則稱它為「掉尾乘(法)」。因為是從兩個因數的「尾位」即末位開始、依次到首位為止的，且每次的乘積都在被乘數相應數位後面依次從低(尾部)位到高位放置，故名。也就是說：先用被乘數的末位與乘數的末位、次末位……直至首位相乘，加完第一輪積；然後再用被乘數的次末位……直至首位分別按同樣的次序與乘數各位相乘，加完第二輪……直至最後一輪積數，加完最後一輪積數之後，實際已得到各輪積數相加的結果，因此也就得到兩數相乘的結果。這裡需要注意一下定位的方法：被乘數的某位與乘數的第幾位相乘時，乘積個位數就加在被乘數中這位數右邊的第幾位上，積的十位數便加在前一位。

在下乘法中，如果乘數乘被乘數的每一位時，按乘數的第二位、第三位……末位，最後才是首位的順序進行，則稱為留頭乘法。因為先把乘

數的頭一位留下，故名。

留頭乘的具體運算步驟為：把乘數的首位先留下，用乘數的次位、第三位……直至末位依次與被乘數末位相乘；然後再用乘數的首位與被乘數末位相乘，乘積如果有十位則十位數字置於該被乘數位上，乘積如果小於十則去掉該位被乘數，然後將乘積加在該位被乘數的下一位上（傳統上稱為「破身」），得到第一輪乘積；再用被乘數的次末位數、次末位數……直至首位數分別依上述次序與乘數各位相乘，依次加在上一輪乘積之上，如此進行直至加完最後一輪乘積，即獲得兩數相乘的結果。這裡要注意每次把乘積加入已有結果中的方法：被乘數某位與第幾位乘數相乘，其積的個位數就加在該被乘數所在位右邊的第幾位上，其十位數則加在前一位上。

留頭乘法及其名稱最早出現在朱世傑《算學啓蒙》（1299）中，書中有四句口訣和若干例題，但無具體運算順序的說明。稍晚，朝鮮姜保的《授時曆（捷法）立成》（1343）中也有此算法，但只有口訣。⁵ 元代《算法全能集》（具體年代不詳，早於《詳明算法》）、《詳明算法》（已知的最早版本刊於 1373 年），明代《九章算法比類大全》（簡稱《九章比類》）（1450）、《數學通軌》（1578）、《算法統宗》（1592）等書中多以「乘法」之名指稱「留頭乘」，並逐漸出現了詳細的例解和說明。前輩學者對《算學

5 《授時曆捷法立成》（中國科學院自然科學史研究所藏李儼贈藍印本，1346），「算法」，頁 1。華印椿說《授時曆捷法立成》於 1280 年著成，翌年刊行，1298 年傳入朝鮮，1343 年改成《大元至元授時曆捷法立成》印行。其說見華印椿，《中國珠算史稿》，頁 237。華說有誤。按：原書未題撰者姓名。據書末孫光嗣序，1303-1304 年間，高麗忠宣王命崔誠之花重金向元朝太史院官學曆法，「得其不傳之妙」。崔回到朝鮮後欲傳其學卻「難得其人」，最後纔好不容易找到可造之材姜保。姜保「一學而盡通，其法捷而神明，精通之間，傳播人口」，並因此幾次遷昇。姜保又命進士李仁實傳寫下來，成為《授時曆捷法立成》。所以，此書可以說是崔、姜、李所共撰，而從內容上看，當以崔、姜為主。李儼、李迪、郭世榮、石雲里等學者對此有同異互見的討論。見李儼，《十三、十四世紀中國民間數學》（北京：科學出版社，1957），頁 47；李迪主編，《中國數學史大系（第 6 卷）西夏金元明》（北京：北京師範大學出版社，1999），頁 518-519；郭世榮，《中國數學典籍在朝鮮半島的流傳與影響》（濟南：山東教育出版社，2009），頁 188-193；石雲里，〈古代朝鮮學者的《授時曆》研究〉，《自然科學史研究》17.4(1988.10): 312-321。

啓蒙》、《九章比類》等算書中有關留頭乘的口訣或說明等項進行過不盡相同的解釋和分析，我們發現：潘逢禧、李培業等對《算學啓蒙》中留頭乘口訣所做出的解釋是不同的，有的並不符合其口訣本意；華印椿對《九章比類》中留頭乘的說明和口訣之間關係所做的解釋，及對留頭乘來源的描述也存在問題。下面將分別進行探討和分析，並對相關問題給出新的解釋。

三、對潘逢禧、李培業等人所做不同解釋的探討

《算學啓蒙》卷上有「留頭乘法門」，其標題下先給出四句口訣：

留頭乘法別規模，起首先從次位呼。

言十靠身如隔位，遍臨頭位破身鋪。⁶

口訣本身未把操作的方法表達清楚。書中對口訣沒有進一步的說明，雖然有不少例題，但沒有計算草圖展示布數的完整細節。所以，其具體計算方法是一個值得研究的問題。

朝鮮《授時曆捷法立成》中也有「留頭乘法」這個名稱，該名稱出現在書末的「算法」條中：

留頭乘法

初呼言十下靠身，若言如者隔位陳。

乘到留頭一位數，逢十就身如退加。

明指留頭定數訣，一下能知手算真。⁷

口訣的前四句對乘積的置數位置有比較詳細的描述：「初呼言十下靠身，若言如者隔位陳」是指，先用被乘數末位（如四）與乘數第二位數相乘，置數位置由所用九九口訣中的乘積來確定，如果乘積含有「十」字（比如該位乘數為八，用口訣「四八三十二」），則乘積中的十位數字（三）緊靠該位被乘數（四）之右擺放；如果乘積小於十，要用「如」字的口訣（比

6 元·朱世傑，《算學啓蒙》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通匯·數學卷·第1分冊》（鄭州：河南教育出版社，1993），頁1131。

7 《授時曆捷法立成》，「算法」，頁1。

如該位乘數為二，用口訣「二四如八」），則將乘積（八）與該位被乘數（四）隔一位放在右邊。「乘到留頭一位數，逢十就身如退加」是指，用被乘數末位從乘數次位開始乘，一直到乘完乘數末位數，最後纔與乘數中留下的首位數（即「留頭一位數」）相乘，若所念口訣含有「十」字，就把該位被乘數改為乘積的十位數字（如果口訣還含有個位數，則在次一位上相加）；若是用含「如」的口訣，則（去掉該位被乘數之後）在該位被乘數的下一位加上乘積。

因《授時曆》中並無「算法」一條，「留頭乘法」初見於《算學啓蒙》中，而《授時曆捷法立成》中的「飛歸除法歌」與《算學啓蒙》中的「九歸除法」也相似。所以，李迪、⁸ 郭世榮⁹ 等認為，上述情況說明《算學啓蒙》在元代已傳入朝鮮。無論如何，根據《算學啓蒙》中的留頭乘口訣，我們可以確定留頭乘中乘數各位乘被乘數某位時，乘數參與運算的順序；《授時曆捷法立成》則比《算學啓蒙》的口訣更清楚地描述了運算過程中乘積的置數位置。

李培業和朱希安等¹⁰ 認為《算學啓蒙》留頭乘口訣中的「起首先從次位呼」是指從法（乘數）的第二位乘起，「言十靠身如隔位」是指用乘法口訣做相乘運算時乘積中的十位靠著實（被乘數）身放置，個位與實身隔一位。「遍臨頭位破身鋪」是指最後才與法的首位相乘，把實身破了。這與《授時曆捷法立成》口訣的含義也相同。建部賢弘和山崎與右衛門等¹¹ 對該口訣的解釋與李培業相似。

清末潘逢禧在《算學發蒙》（1882）「古算二」中對《算學啓蒙》留頭乘口訣也有比較詳細的解釋：

首句謂：留頭乘別有用法。二句謂：起首先乘實尾位，卻以法次位乘起。

三句謂：言「十」則在本位，言「如」則在下位。末句謂：每乘一位，

8 李迪，《中國數學史大系（第 6 卷）西夏金元明》，頁 518-519。

9 郭世榮，《中國數學典籍在朝鮮半島的流傳與影響》，頁 188-193。

10 李培業，《中國珠算簡史》，頁 46；朱希安、葉宗義主編，《當代中國珠算》，頁 50、157。

11 （日）建部賢弘，《新編算學啓蒙諺解》，頁 725；（日）山崎與右衛門、戶谷清一、鈴木久男，《珠算算法の歴史》，頁 101-102、92-151。

俱從法次位以下乘遍，方以法首位破實位本身也。¹²

「言『十』則在本位，言『如』則在下位」表明，潘氏認為「言十靠身如隔位」是講用含「十」的口訣時，乘積的十位數放在該位被乘數所在位置（取代這位被乘數），用含「如」的口訣時，乘積放在這位被乘數的下一位。華印椿採用了潘逢禧的上述解釋。¹³張德和對其中的「言十靠身如隔位」有相似的解釋，認為「言十靠身」是指在本身解決；「如隔位」是指原來不滿十的數在本身解決，現在是在隔位了，也就是言「如」則在本身的下位解決。¹⁴

上述學者的分歧雖僅在於對「留頭乘法門」口訣中的「言十靠身如隔位」句有不同的解釋，但此句是對運算中乘積擺放位置的具體描述，而這對於該運算來說是非常重要的。所以，有必要將該口訣的正確解釋搞清楚，以免對後人造成誤導。

除了對口訣的解釋，潘氏還舉「 4096×64 」一例（圖一，左邊為原書圖片，右邊提供現代解釋以便讀者理解），對《算學啟蒙》中的留頭乘法進行了詳細解釋，並在「凡例」中說：「古算久已失傳，茲從各書中參悟而出」。¹⁵所以圖一所示布數方式，應該是潘逢禧據古算書推測而來的。勞漢生卻表述成：「朱世傑的留頭乘的布數方式，法數在實數的右上方，實數在法數的左下方，也是二重，但法實兩數隔開，並不對位。」¹⁶他直接將潘氏的布數圖式誤作是朱世傑的了。李培業認為潘氏的二行式演草沒有必要，可以在一行上置數，前實後法，中間隔開即可。¹⁷

12 清·潘逢禧，《算學發蒙》。

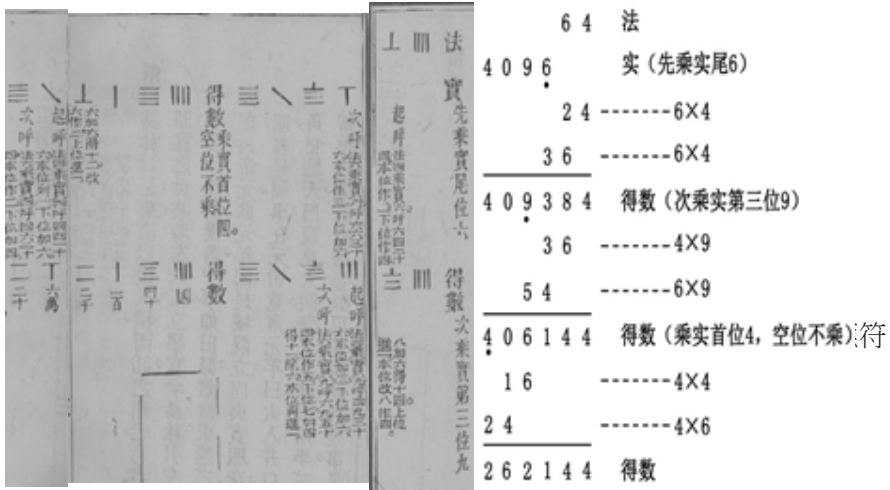
13 華印椿，《中國珠算史稿》，頁 153-154。

14 張德和，〈珠算的加減和口訣及其內在機制——「再領風騷數百年」續篇〉。

15 清·潘逢禧，《算學發蒙》。

16 勞漢生，《珠算與實用算術》，頁 42。

17 李培業，《中國珠算簡史》，頁 46。



圖一 潘逢禧《算學發蒙》「古算二」中的留頭乘例題
 (左為原圖，右為對應的運算程序)

無論布數方式如何，潘氏對運算順序的說明及乘積的實際置數位置應符合《算學啟蒙》中留頭乘口訣的本意。然而，其例解中的小字說明卻與乘積的實際置數位位置不符，比如第一輪運算中的說明為：「起呼法四乘實六，呼六四二十四，本位¹⁸作二，下位作四；次呼法六乘實六，呼六六三十六，本位作三，下位加六」，據此則第一輪運算中所得兩積 24 和 36 的十位數字 2 和 3 都應放在本位即被乘數 4096 的個位 6 的位置上，個位數都應放在下位上。這與前引《算學發蒙》對朱世傑「留頭乘法」口訣的解釋是一致的。也就是說，潘氏的說明文字將《算學啟蒙》「言十靠身如隔位」，解釋為把用「言十」口訣

18 宋代《謝察微算經》「用字例義」和明代程大位《算法統宗》「用字凡例」中均有下解釋：「實，本數也。……身，本位也。」在留頭乘法中，「身」是指被乘數中與乘數各位相乘的那一位，也叫作本位，有時也將「本位」簡稱為「位」。詳見宋·謝察微，《謝察微算經》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通匯·數學卷·第 1 分冊》，頁 424；明·程大位，《算法統宗》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通匯·數學卷·第 2 分冊》（鄭州：河南教育出版社，1993），頁 1229。

(乘積有「十」字的口訣)得到的第一位積和用「言如」口訣(含有「如」字、乘積小於十的口訣)得到的乘積分別放在被乘數本位和其下一位。很顯然,這樣做會出現 24 加 36 得到 60,表示 600。這肯定是錯誤的,因為兩個積 24 和 36 在整數乘法中分別表示 24 和 360,結果應是 384。不過,潘氏的籌式中所表示的兩次乘積之和,正是正確的結果 384,可見在放置第一次乘積時,他實際退了一位,在加第二次乘積時,才把其中的十位放在本位上。奇怪的是,每一輪乘法運算中,他不僅在計算最後那次乘積時把這位被乘數所在的位置稱為「本位」,而且把放置第一次乘積中十位數字的位置都錯誤地稱作了「本位」。縱觀潘氏例解圖式中的「本位」和「下位」的使用情況,可以發現,雖然他關於「本位」的用法有誤,但其運算中的實際定位與前引李培業的解釋是一致的。

另外,《算學啓蒙》中「身外加法門」有口訣云:「算中加法最堪誇,言十之時就位加,但遇呼如身下列,君從法式定無差」,¹⁹「身外減法門」口訣亦云:「減法根源必要知,即同求一一般推,呼如身下須當減,言十從身本位除」,²⁰其中「身」、「本位」都是指被乘數中正在參與運算的那位(數),而運算中「言十」、「呼如」的置數位置分別在被乘數中正在參與運算的那位數之本位和下位。這裡的「本位」符合「本位」和「身」的本義,而比上述圖例中的「本位」高一位,因此,我們判定潘氏默認的「本位」之涵義還是其字面上的意義。潘氏在解釋留頭乘口訣「言十靠身如隔位」時出現了錯誤,而他在圖例中關於「本位」的奇怪用法,則是遷就其錯誤解釋的結果。

由上可知,潘逢禧錯誤的口訣解釋和正確的圖式,說明他對「本位」以及《算學啓蒙》口訣中「身」、「隔位」的理解有誤。這種情況說明,數學計算本身所蘊涵的明顯客觀性具有一定的糾錯能力。同時,這也說明,李培業等人對該口訣中關於乘積擺放位置的理解是正確的。

那麼,潘氏對留頭乘口訣「言十靠身如隔位」的錯誤解釋有什麼來由呢?考察元明算書可以發現,有的著作中「本位」等數學名詞的含義與《算

19 元·朱世傑,《算學啓蒙》,頁 1130。

20 同上註,頁 1134。

學發蒙》相同，有的著作則不同。下面將幾種算書中「本位」以及與之相關的「身」、「隔位」的含義做一對比（表一，其中材料不限於留頭乘，且對名詞的解釋不限於所引文本，還參考了例解），以便對潘氏之誤的緣由進行分析。

表一 「本位」（或「身」）、「隔位」在幾種算書（現存內容）中的含義

書名	含「本位」或「身」的術文	「本位」或「身」在術文中的意思	含「隔位」的術文	「隔位」在術文中的意思
《乘除通變本末》（1274年）	言十過身，言如就身改之。 ²¹	被乘數中正在參與運算的那位（數）	言十身後布起，言如隔位加零。 ²²	與本位相隔一位
《算法全能集》（元代，早於《詳明算法》）	下十過身前一位，如令只就本身尋。 ²³	同上	置正米在地，以耗米隔位加之。 ²⁴	與本位相隔一位
《詳明算法》（元末，已知最早版本刊於1373年）	乘法，或單位，或就身加，或留頭乘。 ²⁵	同上	言十挨身，言零隔位 ²⁶ （隔位加）……	與本位相隔一位
			隔一位下一十，更於第三位 ²⁷ 下四…… ²⁸	在本位的下一位

21 宋·楊輝，《楊輝算法》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通匯·數學卷·第1分冊》，頁1050。

22 同上註，頁1055。

23 元·賈亨，《算法全能集》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通匯·數學卷·第1分冊》，頁1318。

24 同上註，頁1320。

25 元·安止齋、何平子，《詳明算法》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通匯·數學卷·第1分冊》，頁1351。

26 同上註。

27 《詳明算法》例解的說明將被乘數中參與運算的那一位叫作「本位」（或「本身」），其下位叫作「次位」或「第二位」，再下一位則叫作「第三位」。也就是說，「第三位」所在的位置實際在「本位」的隔一位上。

28 元·安止齋、何平子，《詳明算法》，頁1358。

《九章比類》 (1450年)	身者實數，或三或四。 ²⁹	同上	言十就身，言如隔位。 ³⁰	在本位的下一位
《算學寶鑑》 (1524年)	身，謂本位。 ³¹	同上	言十次位下，言如隔位下。 ³²	與本位相隔一位
《數學通軌》 (1578年)	言(上)[十] ³³ 就身，言如下位，次第求之。 ³⁴	同上	呼如須隔位，言十在本身。 ³⁵	在本位的下一位
			呼如加隔位，言十加次位。 ³⁶	與本位相隔一位
《算法統宗》 (1592年)	三四五來乘遍了，却將本位破其身。 ³⁷	同上	逢如須隔位，言十在本身。 ³⁸	在本位的下一位
	本位上二，右位加五。 ³⁹	口訣中乘積的十位數的放置位置。	倍一挨身下，餘皆隔位遷。 ⁴⁰	與本位相隔一位

29 明·吳敬，《九章比類》，收入《中國科學技術典籍通匯·數學卷·第2分冊》，頁16。

30 同上註。

31 明·王文素，《算學寶鑑》，收入《中國科學技術典籍通匯·數學卷·第2分冊》，頁361。

32 同上註，頁381。

33 原文作「上」，今據算理校改為「十」。

34 明·柯尚遷，《數學通軌》，收入《中國科學技術典籍通匯·數學卷·第2分冊》，頁1178。

35 同上註，頁1181。

36 同上註，頁1182。

37 明·程大位，《算法統宗》，頁1245。

38 同上註，頁1238。

39 明·程大位，《算法統宗》，頁1246。

40 同上註，頁1406。

《算學發蒙》 (1882 年)	每乘一位， 留實本位不 破，……然 後以法數首 位，破實數 本位 ⁴¹	被乘數中正在 參與運算的 那一位(數)	言十靠身如 隔位。 ⁴²	在本位的下一位
	本位作三，下 位加六 ⁴³	口訣中乘積的 十位數的放 置位置。		

根據表一可知，元明算書對「隔位」的用法有兩種，一種是與本位之間相隔一位（即如果以本位為第一位，則「隔位」指將數置於右數第三位）；另一種是本位的下一位（即如果以本位為第一位，則「隔位」指將數置於第二位）。《乘除通變本末》、《算法全能集》、《算學寶鑒》對「隔位」只有前一種用法；《九章比類》對「隔位」只有後一種用法。《詳明算法》、《數學通軌》和《算法統宗》則有兩種用法。「隔位」用如「下位」的後一種用法，從元代的《詳明算法》、明代早期的《九章比類》到明代中後期的《數學通軌》和《算法統宗》，已是不絕如縷，這應是潘氏對「隔位」的錯誤理解的來源。此外，《算法統宗》中有些例解中的文字說明也沒有體現出「本位」是被乘數參與運算的那一位的意思，與其「用字凡例」中對「本位」的解釋不相符。如其留頭乘歌曰「下乘之法此為真，起手先將第二因；三四五來乘遍了，卻將本位破其身」，這裡的「本位」和「身」很明顯是指被乘數中參與運算的那一位(數)，這也與「留頭乘」條下第一題的例解中小字部分裡的「變五為一」等含義相同，但小字部分裡的「本位」卻指的是放置口訣中乘積的十位數所在的位置，很明顯，前後含義不一致。這種情況與《算學發蒙》中的相似，鑑於《算法統宗》巨大的影響力，我們推斷潘氏在例題的註解中對「本位」的使用主要源於《算法統宗》的可能性較大。

41 清·潘逢禧，《算學發蒙》。

42 同上註。

43 同上註。

四、對留頭乘相關問題的新解釋

除了採用潘逢禧對留頭乘口訣的解釋，華印椿⁴⁴等對留頭乘的來源等問題也進行過詳細分析，並有以下兩點意見，一是《九章比類》等書中的留頭乘之說明和口訣相互矛盾，二是這種矛盾所造成的混同留頭乘和掉尾乘的現象源於《詳明算法》。這種觀點為有的學者所接受。⁴⁵ 結合上文對留頭乘法與掉尾乘法的解釋，本文將對相關文獻進行詳細的整理和分析，然後給出新的解釋。

(一) 幾種算書中「乘法」名下的例題與名目的相關性

元代賈亨《算法全能集》的「乘法」條中有「譌曰」：

下乘之法此為真，位數先將第二因；

三四五來乘遍了，却將本位破其身。⁴⁶

和《算學啓蒙》一樣，雖無解法的具體說明，但根據這四句歌訣，可以斷定的是：該「乘法」是按乘數的次位、次次位、……末位、首位的順序依次運算的。

此後，元代安止齋、何平子的《詳明算法》中的「口訣」一條中出現了「留頭乘」這個名稱：

乘法：或單位，或就身加，或留頭乘，三者皆乘也，隨位數異其名耳。

布算皆從下起，亦有從上起者，乃開方之法，用之亦可，大場中却能誤人，

故止依法用自下而上。⁴⁷

其後分別有「因法」、「加法」、「乘法」條，其中「乘法」即留頭乘法，其口訣與《算法全能集》中的相同，而比之多了一個說明，後有三則有詳細圖解的例題（圖二），我們用現代數學語言展示其運算過程（圖三）。

44 華印椿，《中國珠算史稿》，頁 156-159。

45 勞漢生，《珠算與實用算術》，頁 124。

46 元·賈亨，《算法全能集》，頁 1320。

47 元·安止齋、何平子，《詳明算法》，頁 1351。

今有銀三十六兩五錢
假令每兩賣鈔二兩五錢問該鈔幾何

乘二位曰九十一兩二錢五分
法曰置銀數以每兩價鈔乘之布算如

後法
五錢
六兩

乘三位
每兩價錢二兩四錢五分
下位三
下位三
下位三

乘四位
每兩價鈔二兩三錢七分五釐
下位三
下位三
下位三

九又三六五
後次十又六
變於木第
身二
作於先
下第
三三
地三
六

三又八
後次十
變於木第
身二
作於先
下第
三三
地三
六

六又五
後次十
變於木第
身二
作於先
下第
三三
地三
六

十五又
後次十
變於木第
身二
作於先
下第
三三
地三
六

五錢
後次十
變於木第
身二
作於先
下第
三三
地三
六

一變木
如身
六作

二兩三錢七分五釐
六錢
八分

三後六
後次十
變於木第
身二
作於先
下第
三三
地三
六

五錢
後次十
變於木第
身二
作於先
下第
三三
地三
六

一變木
如身
六作

二兩四錢五分
六錢
八分

三後六
後次十
變於木第
身二
作於先
下第
三三
地三
六

五錢
後次十
變於木第
身二
作於先
下第
三三
地三
六

一變木
如身
六作

二兩三錢七分五釐
六錢
八分

三後六
後次十
變於木第
身二
作於先
下第
三三
地三
六

五錢
後次十
變於木第
身二
作於先
下第
三三
地三
六

一變木
如身
六作

圖二 從右至左分別為《詳明算法》中「乘二位」、「乘三位」、「乘四位」三則含圖解的例題

$\begin{array}{r} 365 \text{ (實)} \\ 25 \text{ -----} \\ 35 \text{ -----} \\ 15 \text{ -----} \\ 10 \text{ -----} \\ \hline 3611875 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2375 \text{ (法)} \\ 25 \text{ -----} \\ 35 \text{ -----} \\ 15 \text{ -----} \\ 10 \text{ -----} \\ \hline 3611875 \end{array}$	$\begin{array}{r} 365 \text{ (實)} \\ 20 \text{ -----} \\ 25 \text{ -----} \\ 10 \text{ -----} \\ \hline 361225 \end{array}$	$\begin{array}{r} 245 \text{ (法)} \\ 20 \text{ -----} \\ 25 \text{ -----} \\ 4 \text{ -----} \\ 30 \text{ -----} \\ 12 \text{ -----} \\ \hline 315925 \end{array}$	$\begin{array}{r} 365 \text{ (實)} \\ 25 \text{ -----} \\ 10 \text{ -----} \\ \hline 36125 \end{array}$	$\begin{array}{r} 25 \text{ (法)} \\ 25 \text{ -----} \\ 10 \text{ -----} \\ 30 \text{ -----} \\ 12 \text{ -----} \\ \hline 31625 \end{array}$
$\begin{array}{r} 3154375 \\ 15 \text{ -----} \\ 21 \text{ -----} \\ 09 \text{ -----} \\ 06 \text{ -----} \\ \hline 866875 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3154375 \\ 15 \text{ -----} \\ 21 \text{ -----} \\ 09 \text{ -----} \\ 06 \text{ -----} \\ \hline 866875 \end{array}$	$\begin{array}{r} 315925 \\ 12 \text{ -----} \\ 15 \text{ -----} \\ 06 \text{ -----} \\ \hline 89425 \end{array}$	$\begin{array}{r} 315925 \\ 12 \text{ -----} \\ 15 \text{ -----} \\ 06 \text{ -----} \\ \hline 89425 \end{array}$	$\begin{array}{r} 36125 \\ 30 \text{ -----} \\ 12 \text{ -----} \\ 15 \text{ -----} \\ 06 \text{ -----} \\ \hline 9125 \end{array}$	$\begin{array}{r} 36125 \\ 30 \text{ -----} \\ 12 \text{ -----} \\ 15 \text{ -----} \\ 06 \text{ -----} \\ \hline 9125 \end{array}$

圖三 從右至左分別為《詳明算法》中「乘二位」、「乘三位」、「乘四位」對應的大致運算過程

對於乘二位的運算來說，掉尾乘和留頭乘的運算順序是一樣的，所以本文只需考察「乘三位」和「乘四位」的運算方法。根據圖二和圖三展現的運算次序，可知《詳明算法》中「乘三位」例題採用留頭乘法進行運

算，而「乘四位」例題則採用的是掉尾乘。

吳敬《九章比類》「相因乘」條中有對乘法運算的說明：

因乘曰法一位日因，二位之上日乘，相乘之術：以用也所有物數幾何之數為實以物數為主也，以所求物價若干之數為法即取用之法也，法、實相乘法、實之數呼喚相生，言十就身言者法實相呼，十者乃三四一十二、四四一十六之類；身者實數，或三或四，就（？）改作一，却於次位下二。言如隔位如者乃二三如六、三三如九之類，謂法實相呼、數中有如字者，即退本身於下位作數，次第以法求之。假如三位法乘實者，先以第二位、次以第三位相呼乘數，訖，續用第一位法實相乘。⁴⁸

此處大字文本介紹因乘法的含義和運算原則，小字文本解釋大字文本的詞彙和句子的含義，具體介紹計算的方法，並在最後描述了乘數為三位數的乘法之運算順序是第二位、第三位，然後才是首位與被乘數（的某一位）相乘，由此可知這裡採用的是留頭乘法。

在這之後《九章比類》又有「乘法」條，口訣與《算法全能集》等算書中相同，附有三則有詳解的例題（圖四），我們用現代數學語言展示其運算過程（圖五）。



圖四 從右至左分別為《九章比類》中「乘二位」、「乘三位」、「乘四位」例題圖解⁴⁹

48 明·吳敬，《九章比類》，頁 16。

49 明·吳敬，《九章比類》，頁 18-19。

$ \begin{array}{r} 365 \text{(實)} \quad [2375 \text{(法)}] \\ 15 \quad \text{-----} 3 \times 5 \\ 35 \quad \text{-----} 7 \times 5 \\ 25 \quad \text{-----} 5 \times 5 \\ \hline 10 \quad \text{-----} 2 \times 5 \\ 3611875 \\ 18 \quad \text{-----} 3 \times 6 \\ 42 \quad \text{-----} 7 \times 6 \\ 30 \quad \text{-----} 5 \times 6 \\ \hline 12 \quad \text{-----} 2 \times 6 \\ 3154375 \\ 09 \quad \text{-----} 3 \times 3 \\ 21 \quad \text{-----} 7 \times 3 \\ 5 \quad \text{-----} 5 \times 3 \\ \hline 06 \quad \text{-----} 2 \times 3 \\ 866875 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 293 \text{(實)} \quad [275 \text{(法)}] \\ 21 \quad \text{-----} 7 \times 3 \\ 15 \quad \text{-----} 5 \times 3 \\ \hline 06 \quad \text{-----} 2 \times 3 \\ 290825 \\ 63 \quad \text{-----} 7 \times 9 \\ 45 \quad \text{-----} 5 \times 9 \\ \hline 18 \quad \text{-----} 2 \times 9 \\ 225575 \\ 14 \quad \text{-----} 7 \times 2 \\ 10 \quad \text{-----} 5 \times 2 \\ \hline 04 \quad \text{-----} 2 \times 2 \\ 80575 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 4568 \text{(實)} \quad [45 \text{(法)}] \\ 40 \quad \text{-----} 5 \times 8 \\ 32 \quad \text{-----} 4 \times 8 \\ \hline 456360 \\ 30 \quad \text{-----} 5 \times 6 \\ 24 \quad \text{-----} 4 \times 6 \\ \hline 453060 \\ 25 \quad \text{-----} 5 \times 5 \\ 20 \quad \text{-----} 4 \times 5 \\ \hline 425560 \\ 20 \quad \text{-----} 5 \times 4 \\ 16 \quad \text{-----} 4 \times 4 \\ 205560 \end{array} $
---	---	--

圖五 從右至左分別為《九章比類》中「乘二位」、「乘三位」、「乘四位」對應的大致運算過程⁵⁰

在圖四、圖五所示《九章比類》中的「乘三位」和「乘四位」的例解中，雖然被乘數的每一位與乘數相乘時，乘數的各位仍然是從右至左按自低到高的順序排列，但從其下描述的數據分析，可知運算的順序都是從乘數的第二位開始往低位進行，直至末位，最後才是乘數的首位，因此兩題都用的是留頭乘法。對於乘數祇有兩位的乘法，掉尾乘和留頭乘在運算次序上沒有區別，考慮到三則例題都在同一名目之下，我們認為它們均採用了留頭乘法進行計算。

柯尚遷《數學通軌》第一部分「學算須知」⁵¹中有「乘法」的說明及口訣，與《九章比類》相似。第二部分「歸除詮要」中有「因乘義」條，其中有對乘法運算的說明：

50 本文重點考察例題中法數各項參與運算的順序，為簡化算式，法數末尾的 0 不在圖中展示。

51 明·柯尚遷，《數學通軌》，頁 1178。

單位曰因，多位曰乘，通而言之曰乘也。皆從末位起，呼九九相生之數，次第乘之也。又云，呼如須隔位，言十在本身。⁵²

後又有單獨的「乘法」條和三則例題（圖六），我們用現代數學語言展示其運算過程，如圖七。

四位乘濶

稍三百六十五石 每石價銀二錢三分
 五五二十五 五七三十五 三五一十五
 二五成一十破身 五六方三十 六七四十二
 三六一十八 二六一十二破身 三五一十五
 三七二十一 三三如九 二三如六
 歸除還原 總該銀八十六兩六錢八分七厘五

三位乘濶

歸除還原 總該銀九十一兩二錢五分

稍三百六十五石 每石價銀二錢四分
 五五二十五 五四方二十 二五得一十破身
 五六方三十 四六二十四 二六一十二破身
 三五一十五 三四一十二 二三如六破身
 歸除還原 總該銀八十九兩四錢二分五厘

○乘濶

乘濶即因濶一位為因多位為乘此與加濶不同如
 濶至本身有加無除乘濶至本身破除不加
 二位乘濶 濶與實不拘前後置之
 稍三百六十五石 每石價銀二錢伍分 總銀若干
 五五二十五 二五得一十破身 五六方三十
 二六一十二破身 三五一十五 二三如六破身

圖六 從右至左分別為《數學通軌》中「乘二位」、「乘三位」、「乘四位」例解⁵³

$\begin{array}{r} 25 \text{ -----} 5 \times 5 \\ 35 \text{ -----} 5 \times 7 \\ 15 \text{ -----} 3 \times 5 \\ \hline 10 \text{ -----} 2 \times 5 \text{ 破身} \\ 36111875 \\ 30 \text{ -----} 5 \times 6 \\ 42 \text{ -----} 6 \times 7 \\ 18 \text{ -----} 3 \times 6 \\ 12 \text{ -----} 2 \times 6 \text{ 破身} \\ \hline 3154375 \\ 15 \text{ -----} 3 \times 5 \\ 21 \text{ -----} 3 \times 7 \\ 09 \text{ -----} 3 \times 3 \\ 06 \text{ -----} 2 \times 3 \\ \hline 866875 \end{array}$	$\begin{array}{r} 365 \text{ (實)} \quad \boxed{245 \text{ (法)}} \\ 25 \text{ -----} 5 \times 5 \\ 20 \text{ -----} 5 \times 4 \\ 10 \text{ -----} 2 \times 5 \text{ 破身} \\ \hline 3611225 \\ 30 \text{ -----} 5 \times 6 \\ 24 \text{ -----} 4 \times 6 \\ 12 \text{ -----} 2 \times 6 \text{ 破身} \\ \hline 315925 \\ 15 \text{ -----} 3 \times 5 \\ 12 \text{ -----} 3 \times 4 \\ 06 \text{ -----} 2 \times 3 \text{ 破身} \\ \hline 89425 \end{array}$	$\begin{array}{r} 365 \text{ (實)} \quad \boxed{25 \text{ (法)}} \\ 25 \text{ -----} 5 \times 5 \\ 10 \text{ -----} 2 \times 5 \text{ 破身} \\ \hline 36125 \\ 30 \text{ -----} 5 \times 6 \\ 12 \text{ -----} 2 \times 6 \text{ 破身} \\ \hline 31625 \\ 15 \text{ -----} 3 \times 5 \\ 06 \text{ -----} 2 \times 3 \text{ 破身} \\ \hline 9125 \end{array}$
---	---	---

圖七 從右至左分別為《數學通軌》中「乘二位」、「乘三位」、「乘四位」的大致運算過程

52 明·柯尚遷，《數學通軌》，頁 1181。
 53 明·柯尚遷，《數學通軌》，頁 1190。

上面第 1 題計算 365×25 ，將 365 從低到高的每一位數乘 25 時，都是按先乘 5 再乘 2 的順序；第 2 題計算 365×245 ，將 365 從低到高的每一位數乘 245 時，都是按先乘 5、次乘 4、最後乘 2 的順序；第 3 題計算 365×2375 ，將 365 從低到高的每一位數乘 2375 時，都是按先乘 5、次乘 7、再乘 3、最後乘 2 的順序。可以看出後兩個問題的計算明顯是採用掉尾乘的方法。第 1 題的乘數（法）只有兩位，採用掉尾乘和留頭乘時的順序是一樣的。但是就在此題前有一句說「二位乘法，法與實不拘先後」，也就是說計算 365×25 時古人認為這樣計算順序與前面的沒有本質的區分：將 25 從 5 到 2 的每一位數乘 365 時，按先乘 5、次乘 6、最後乘 3 的順序進行，可見這個問題也是用掉尾乘法計算的。因此以上三則例題的運算順序都屬於掉尾乘。

現將幾種算書中關於留頭乘的口訣、說明以及例題等做一總結，如表二。

表二 幾種算書中留頭乘口訣、說明與例題分析

書名	《算法全能集》 (元代，早於《詳明算法》)	《詳明算法》 (元末，已知最早版本刊於 1373 年)	《九章比類》 (1450 年)	《數學通軌》 (1578 年)
留頭乘口訣	下乘之法此為真，位數先將第二因；三四五來乘遍了，卻將本位破其身（出處同前引）	同前	同前	同前
關於留頭乘的說明	(無)	二以上位數多者用此法，從末位小數算起，用歸除還元。 ⁵⁴	二以上位數多者用此法，從末位小數次第算起，用歸除還元。 ⁵⁵	二以上位數多者用此法，[從](位求)[末位]小數次第算起，[用歸除]還元。 ⁵⁶

54 元·安止齋、何平子，《詳明算法》，頁 1358。

55 明·吳敬，《九章比類》，頁 18。

56 原文作「位求小數次第算起，還元」，當校正為「從末位小數次第算起，用歸除還元」。抄寫時前脫「從」一字、後脫「用歸除」三字，「末」字誤作「求」，又與「位」

是否出現「留頭乘」一詞	否	是	否	否
「乘二位」例題數字	365×25	365×25	4568×45	365×25
「乘三位」例題數字及採用的運算方法	365×245 無具體運算方法	365×245 留頭乘法	293×275 留頭乘法	365×245 掉尾乘法
「乘四位」例題數字及採用的運算方法	365×2375 無具體運算方法	365×2375 掉尾乘法	365×2375 留頭乘法	365×2375 掉尾乘法
留頭乘例解與口訣的相關性	不確定	有一題不相符	全部相符	全部不相符

根據表二，除《算法全能集》由於沒有記錄具體計算方法而無法確定其例解與口訣的相關性外，《九章比類》中有一題的數字與前兩本算書中的完全相同，《數學通軌》中全部題目的數字與前兩本書中的完全相同。《詳明算法》中有一個例解與口訣和說明都不符，《九章比類》中全部例解與其口訣和說明均相符（詳下小節的分析），《數學通軌》「乘法」名下全部例解與其口訣和說明完全不相符。我們認為這些算書中口訣、說明和例解之間存在的一致性與不一致性，能夠反映不同算書在內容、編纂和時代問題上的複雜性。下面對此做一些分析。

（二）《九章比類》等書中的留頭乘說明與口訣不矛盾

據表二，《九章比類》等算書中有關乘法的口訣和說明應該是一致的。但古人的說法比較省略，沒有把意義清楚地表達出來，這給後人的不同理解留下了空間。如華印椿認為，《九章比類》「乘法」之說明中的「從末位小數次第算起」一語，與口訣中的「位數先將第二因」有矛盾，容易誤

誤倒。今參考《詳明算法》和《九章比類》的相應文字校正。原文見於明·柯尚遷，《數學通軌》，頁 1178。

將掉尾乘和留頭乘混同。⁵⁷ 形成這種判斷的原因可能是他認為這兩句都是針對乘數的運算而言的，即不僅「位數先將第二因」是指從乘數的第二位開始算起，而且「從末位小數次第算起」也是指從乘數的末位數開始算起。

我們認為華先生的理解有誤。在他認為有矛盾的兩句原文中，說明文字中的「從末位小數次第算起」實際是指從被乘數的最後一位起依次往前至首位分別與乘數相乘，而口訣中的「位數先將第二因」是指用被乘數每一位與乘數相乘時要先乘以乘數的第二位。所以，對此「乘法」之說明和口訣的正確解釋是：對於位數多於 2 的乘數來說要用留頭乘這種方法，先用被乘數的末位數乘以乘數的第二位，然後再分別乘以乘數的第三位、第四位……直至乘完乘數的末位數，最後再乘以乘數的首位數，這樣被乘數的末位數就乘完了，完成了第一輪運算；下面就是依次用被乘數的次末位數、次次末位數……直至用被乘數的首位數都按照上述步驟乘完乘數各位。

因此，按照我們的解釋，吳敬《九章比類》中的「乘法」說明和口訣完全一致，並不矛盾。更重要的是，書中留頭乘名下的所有例解也是與之吻合的，這也證明我們的解釋是正確的。

（三）《九章比類》比《詳明算法》關於留頭乘的來源更早一些

華先生還認為，《九章比類》中的「乘法」說明和口訣全部抄自《詳明算法》，而《數學通軌》在「乘法」條中記錄的說明和留頭乘口訣，同樣照抄《詳明算法》。他還認為，古算書中對留頭乘和掉尾乘的混同，實始於《詳明算法》。黃清揚、洪萬生兩先生根據兩本算書中「乘法」口訣和例題的相似性，也推測《九章比類》中「乘法」的可能來源是《詳明算》。⁵⁸ 這是一個相似但較弱勢的結論。這是根據文本的相似性得到的結論。我們為情況不那麼簡單。

首先，《九章比類》、《數學通軌》與《算法全能集》、《詳明算法》中的「乘法」口訣是完全一致的，前兩部算書中「乘法」名下的題目也與後

57 華印椿，《中國珠算史稿》，頁 156。

58 黃清揚、洪萬生，〈從吳敬算書看明代《算學啓蒙》的流傳〉，《中華科技史學會會刊》10(2006.12): 70-88。

兩本算書有一定的相似性，而《算法全能集》比《詳明算法》要早，那麼晚出的《九章比類》中留頭乘的口訣及說明的來源完全存在別的可能性。比如有的文章就認為《九章比類》中的「乘法」口訣是引自《算法全能集》，或者與《算法全能集》有淵源關係。如潘紅麗等提到，《九章比類》中的留頭乘歌訣引自賈亨《算法全能集》，但沒有說明有何依據，⁵⁹ 估計她也是根據文本的相似性。張久春通過文本和題目的對比分析，認為《九章比類》卷首「乘除開方起例」的內容和《算法全能集》、《詳明算法》以及《丁巨算法》有淵源關係。⁶⁰ 這說明根據相似性可能得出不同的結論。

其次，根據表二，這三部古算書中對留頭乘的說明並不完全一致，只是相似，所以華先生所謂「全部抄自」和「照抄」，都是沒有依據的。

應該指出，僅僅根據兩本算書某些內容有相似性，只能猜測但不能斷定編成年代靠後的算書照抄了比它早的算書中的這部分內容。它們完全有可能只是具有某種共同淵源的關係。

其三，《詳明算法》「口訣」條中有對乘法運算中「隔位」一詞的解釋：「言十挨身，言零隔位，謂如喝五五二十五，則二十挨身，五為隔位，蓋隔一位下也。喝一五如五，則即隔位下矣。乘除須記行數，如中間有隔一位、二位、三位者，若差一位則以十為百、以百為十矣。」⁶¹ 《九章比類》的「相因乘」條中也有對乘法運算中「言如隔位」的解釋：「數中有如字者，即退本身於下位作數」，⁶² 《數學通軌》中有「呼如須隔位，言十在本身」⁶³ 的說法。很明顯，《詳明算法》「口訣」條將「隔位」解釋為「本身下位的下位」，《九章比類》和《數學通軌》則解釋為「本身的下位」，也就是說，後兩本算書對乘法運算中「隔位」的解釋與前者完全不同，我們認為後兩本算書的編撰者應該沒有看到前一算書中的這部分內容，或者是看

59 潘紅麗、潘有發，〈《九章算法比類大全》中的珠算術〉，《珠算》2002.2(2002.4): 6-9。

60 張久春，〈《九章算法比類大全》淵源初探〉，《自然科學史研究》30.2(2011.4): 207-215。

61 元·安止齋、何平子，《詳明算法》，頁 1351-1352。

62 明·吳敬，《九章比類》，頁 16。

63 明·柯尚遷，《數學通軌》，頁 1181。

到了但並沒有採用。

最後，《九章比類》和《數學通軌》中只有「乘法」之名而沒有「留頭乘」這個名稱，《算法全能集》中也是如此。而《詳明算法》中是有「留頭乘」這個名稱的。

因此，《九章比類》和《數學通軌》的「乘法」與《詳明算法》的這部分內容並無直接繼承關係。另外，前面提到《詳明算法》中的留頭乘名下有掉尾乘的例題，所以它不僅沒有保存留頭乘在其產生時代的形式，而且很可能在從更早的著作中編抄相關內容時發生了混淆。只有吳敬《九章比類》「乘法」的說明、口訣和例題是完全對應的。而且，《九章比類》中「隔位」指本位的下一位，當被乘數和乘數都連續出現數值大的數位時，這容易使進位的數需要放置在被乘數中尚須使用的數位上，從而容易發生混淆，這顯然是算法初創時考慮不周的表現。因此，我們認為吳敬的「乘法」比《詳明算法》中的形式要更原始，其來源應該更早些。在《算法全能集》之前，至晚在《算學啓蒙》時代就已經有這種算法的雛形了。

（四）《數學通軌》的「乘法」不直接源於《詳明算法》

前引《數學通軌》中「因乘義」條的說明，可做這樣的解釋：乘數有一位數的叫作因，乘數有多位數的叫作乘，總括來說都叫作乘。此乘法運算都是從被乘數的末位開始運算，⁶⁴用九九口訣按次序相乘。用呼「如」口訣所得的積數置於被乘數本身的下位，用言「十」口訣所得的積數置於被乘數本位。

這裡的乘法運算並未涉及是從乘數的哪一位算起，因此「因乘義」並非是限於掉尾乘或留頭乘的描述。此書第一部分內「乘法」條中的說明與口訣講的是留頭乘，而第二部分「乘法」下的例題則全是掉尾乘。這兩者雖可以同時置於「因乘義」的範圍之內，但它們彼此之間是明顯矛盾的。由於全書中都無留頭乘的例題，可以斷定柯尚遷在編《數學通軌》時沒有

64 如果像有的學者將「皆從末位起」句理解成「該運算是從乘數的末位算起」，那麼針對因法即「乘數是一位數」的運算，又怎麼會有乘數的末位和首位之稱？而從《數學通軌》有關算例中也可以看出，無論是「因」還是「乘」的運算，都是從被乘數的末位開始算起的，所以這句只能理解成是對被乘數運算次序的說明。

搞清楚留頭乘和掉尾乘之間的差異就將這些內容抄編在了一起。

根據前面的分析，《數學通軌》中的「乘法」口訣與《算法全能集》和《詳明算法》中的相同，其說明和例題與兩算書都有相似性：《數學通軌》和《詳明算法》兩書的「隔位」都有與本位之間隔一位和本位的下一位兩種含義，但兩個義項在兩書中分別處於不同的名目之下：前一義項在《詳明算法》中處於「口訣」條下，在《數學通軌》中處於「金蟬乘法義」條下；後一義項在《詳明算法》中處於「加法」條下，在《數學通軌》中處於「因乘義」條下；《詳明算法》中有「留頭乘」這個名稱，而《數學通軌》和《算法全能集》中並沒有這個名稱。而且，《詳明算法》的「留頭乘」名下有一題是按照掉尾乘進行運算的，《數學通軌》中則全部按照掉尾乘進行的運算。可見《數學通軌》的這部分內容肯定不直接取自《詳明算法》；但根據兩者的相似性，也不能確定它一定沒受過《詳明算法》的影響。

五、結 語

一些學者對《算學啓蒙》的留頭乘口訣做了不同的解釋，這種不同源於對口訣中「言十靠身如隔位」一句的不同理解。潘逢禧、張德和認為言「十」在本位，言「如」在下位；而李培業、山崎與右衛門及建部賢弘則認為言「十」在下位，言「如」在隔位。本文通過分析，尤其是與《授時曆捷法立成》中的留頭乘口訣進行對比分析，可以斷言：李培業等人所給的解釋符合其口訣本意；而潘逢禧等所做的解釋則不符合其口訣本意，這源於他們對古算中「身」、「本位」、「隔位」等詞的理解有誤。這種對「隔位」的錯誤理解在《詳明算法》、《九章比類》、《數學通軌》或《算法統宗》等書中就已出現；而潘氏「留頭乘」例解中「本位」的含義則與《算法統宗》相應部分內容中的相同，這種解釋方式很可能受到了《算法統宗》的影響。

華印椿認為吳敬《九章比類》等書中「乘法」的說明和口訣之間存在矛盾，容易與掉尾乘相混同，而這種混同現象實始於《詳明算法》，這樣的觀點是有問題的。通過對相關概念及文獻的重新梳理，我們斷言：《九

章比類》等書中的表示留頭乘的「乘法」說明和口訣是不矛盾的，且《九章比類》中的例題是與之吻合的，《詳明算法》中的例題與之部分吻合、部分不吻合，而《數學通軌》中的例題完全不與之吻合，這些反映了古代算書編輯的複雜性。

此外，在現存元末以來的算書中，《九章比類》中留頭乘（「乘法」）最接近該算法產生時的狀態，其來源早於《詳明算法》，甚至在《算法全能集》之前，至晚在《算學啓蒙》時代，就應該有這種算法的雛形。《詳明算法》和《數學通軌》中的留頭乘這部分內容是抄編而成的，後者肯定不直接源於前者，但不能肯定它是否受到過前者的影響。

引用書目

一、傳統文獻

- 宋·謝察微，《謝察微算經》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通匯·數學卷·第 1 分冊》，鄭州：河南教育出版社，1993。
- 宋·楊輝，《楊輝算法》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通匯·數學卷·第 1 分冊》，鄭州：河南教育出版社，1993。
- 元·朱世傑，《算學啓蒙》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通匯·數學卷·第 1 分冊》，鄭州：河南教育出版社，1993。
- 元·賈亨，《算法全能集》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通匯·數學卷·第 1 分冊》，鄭州：河南教育出版社，1993。
- 元·安止齋、何平子，《詳明算法》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通匯·數學卷·第 1 分冊》，鄭州：河南教育出版社，1993。
- 明·吳敬，《九章算法比類大全》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通匯·數學卷·第 2 分冊》，鄭州：河南教育出版社，1993。
- 明·王文素，《算學寶鑒》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通匯·數學卷·第 2 分冊》，鄭州：河南教育出版社，1993。
- 明·柯尚遷，《數學通軌》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通匯·數學卷·第 2 分冊》，鄭州：河南教育出版社，1993。
- 明·程大位，《算法統宗》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通匯·數學卷·第

2分冊》，鄭州：河南教育出版社，1993。

清·潘逢禧，《算學發蒙》，逸叟（逸香齋），1882。

崔誠之、姜保、李仁實，《授時曆捷法立成》，中國科學院自然科學史研究所藏藍印本，1346。

(日)建部賢弘，《新編算學啓蒙諺解》，收入(日)淺見惠、(日)安田健訖編，《日本科學技術古典籍資料·數學篇(2)》，東京：科學書院，2001。

二、近人論著

(日)山崎與右衛門、戶谷清一、鈴木久男 1958 《珠算算法の歴史》，東京：森北出版株式會社。

石雲里 1998 〈古代朝鮮學者的《授時曆》研究〉，《自然科學史研究》17.4(1988.10): 312-321。

朱希安、葉宗義主編 2000 《當代中國珠算》，北京：中國財經出版社。

李 儼 1955 《中國算學史》，北京：商務印書館。

李 儼 1957 《十三、十四世紀中國民間數學》，北京：科學出版社。

李 迪 1999 《中國數學史大系 第6卷 西夏金元明》，北京：北京師範大學出版社。

李 迪 2004 《中國數學通史·明清卷》，南京：江蘇教育出版社。

李培業 2007 《中國珠算簡史》，北京：中國財政經濟出版社。

華印椿 1987 《中國珠算史稿》，北京：中國財政經濟出版社。

郭書春 2010 《中國科學技術史·數學卷》，北京：科學出版社。

郭世榮 2009 《中國數學典籍在朝鮮半島的流傳與影響》，濟南：山東教育出版社。

張久春 2011 〈《九章算法比類大全》淵源初探〉，《自然科學史研究》30.2(2011.4): 207-215。

梅榮照 1966 〈唐中期到元末的實用算術〉，收入錢寶琮主編，《宋元數學史論文集》，北京：科學出版社，1966，頁10-35。

張德和 2011 〈珠算的加減和口訣及其內在機制——「再領風騷五百年」續篇〉，《上海珠算心算》225(2011.1): 6-44。

黃清揚、洪萬生 2006 〈從吳敬算書看明代《算學啓蒙》的流傳〉，《中華科技史學會會刊》10(2006.12): 70-88。

勞漢生 2000 《珠算與實用算術》，石家莊：河北科學技術出版社。

潘紅麗、潘有發 2002 〈《九章算法比類大全》中的珠算術〉，《珠算》2002.2
(2002.4): 6-9。

Several Issues Pertaining to *Liutou Cheng* in Ancient Abacus Arithmetic

Niu Teng and Zou Dahai *

Abstract

Liutou cheng 留頭乘 was a usual method of multiplication in rapid calculation by counting rods and in abacus arithmetic since the Yuan dynasty. Scholars have held different interpretations of the mnemonic rhyme and the history of *liutou cheng*, leaving several difficult questions awaiting our attention. The present article reexamines the development of *liutou cheng* and its methods of expression. By carefully analyzing the provided mnemonic rhymes, examples, and related captions concerning *liutou cheng* in ancient mathematics books, the article proves that the interpretations asserted by Li Peiye 李培業 and other scholars on the mnemonic rhyme of *liutou cheng* in *Suanxue qimeng* 算學啟蒙 (*Introduction to Mathematics*, 1299) are correct, whereas the explanations of Pan Fengxi 潘逢禧 and others do not accord with the original meaning of the mnemonic rhyme. This paper also proves that contrary to what several scholars have presumed, the caption under the title “*chengfa*” 乘法 (multiplication) in *Jiuzhang suanfa bilei daquan* 九章算法比類大全 (*Comprehensive Collection of Analogical Methods of the Nine Chapters on Mathematical Methods*, 1450) and several other books is not contradictory with the mnemonic rhyme; rather, among the examples in the mathematics books of the Ming dynasty, some are merely coincident with the mnemonic rhyme and caption, whereas others are not. These facets reflect the complexity of the compilations of ancient mathematics books. Finally, the present paper indicates that the content of *liutou cheng* found within *Jiuzhang suanfa bilei daquan* is based on earlier sources, and that the part regarding *liutou cheng* in *Shuxue tonggui* 數學通軌

* Niu Teng, postdoctoral scholar, Chinese Academy of Fiscal Sciences; Zou Dahai, research professor, Institute for History of the Natural Sciences, Chinese Academy of Sciences.

(*Clear Path to Mathematics*, 1578) does not originate directly from *Xiangming suanfa* 詳明算法 (*Detailed and Clear Methods of Mathematics*, earlier than 1369).

Keywords: *liutou cheng*, new interpretation, *Suanxue qimeng* (*Introduction to Mathematics*), *Jiuzhang suanfa bilei daquan* (*Comprehensive Collection of Analogical Methods of the Nine Chapters on Mathematical Methods*), *Shuxue tonggui* (*A Clear Path to Mathematics*), *Xiangming suanfa* (*Detailed and Clear Methods of Mathematics*)