

從面積問題看《算學寶鑑》 在中國傳統數學中的地位

郭 書 春*

摘 要

明朝王文素著的《算學寶鑑》(1524)是清朝《數理精蘊》問世(1723)前中國最大的一部數學著作。由於它成書四百餘年來未能刊刻，數學史界對之研究甚少，一般將其與吳敬的《九章算法比類大全》(1450)相提並論。本文認為，《算學寶鑑》的題目大都是從前輩數學著作中收集來的，只有「通證」、「新證」等部分才反映了王文素自己的思想。王文素未看到過《九章算術》，他所引用的所謂《九章》的內容，都源於吳敬的《九章算法比類大全》。本文著重分析了《算學寶鑑》中諸田求積、圓田求積、弧田論積三節的面積問題，指出王文素糾正了《五曹算經》、《九章算法比類大全》等著作中的若干錯誤公式，力求給出正確的求積公式。這說明《算學寶鑑》繼承了《九章算術》、《楊輝算法》等算法精確的傳統，與《九章算法比類大全》等有大量法理不通的算法是有根本區別的。因此，就中國傳統數學著作的分類上，《九章算法比類大全》是《五曹算經》等傳統的繼承者，而《算學寶鑑》則是《九章算術》、《楊輝算法》等傳統的繼承者。

關鍵詞：王文素、算學寶鑑、九章算法比類大全、楊輝算法、面積

* 作者係北京中國科學院自然科學史研究所研究員。

一、前言

明朝中葉，中國出現了一部大型的數學著作，這就是王文素所著的《新集通證古今算學寶鑑》（下稱《算學寶鑑》）。¹王文素，字尚彬，山西汾陽人，成化間（1465-1487）隨父經商，遂定居於真定饒陽（今河北省）。其《算學寶鑑》在正德8年（1513）仲春已基本完成，寶朝珍為之作序，謂全書十帙，三十餘卷，杜良玉願出資刊刻。²不知什麼原因，杜良玉沒有刊刻。後來，王文素又作了增補，嘉靖元年（1522）定稿，作為在西城館訓蒙的教材。嘉靖3年（1524），王文素於饒川西城館作自序，謂全書1267問，分為42卷。³不知為什麼，抄本只有41卷。抄本分為子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥12本，長達1270頁，約45萬字。比早於它七十多年吳敬的《九章算法比類大全》⁴（1450年，下稱《九章比類》）多兩倍多，在中國傳統數學著作中是最大的，也是清《數理精蘊》刊刻（1723）前中國最大的一部數學著作。也許是由於篇幅太大，作者「欲刻於版，奈乏工費，不獲遂願」，雖未如作者哀嘆的「不爾，徒以腐塵而已」，⁵四百餘年來卻未能刊行，只以抄本存世，沒有得到流傳，沒有在明、清兩朝發揮應有的社會效益。我們在1992年將其編入《中國科學技術典籍通彙》〈數學卷〉，並於次年出版，了卻了王文素「刻木廣傳，而與尚算君子共之」⁶的宿願，卻只能是為中國數學史、中國珠算史的研究提供資料，對推動當前數學的發展及應用於國計民生，已無多大實際意義了。

《算學寶鑑》與《九章比類》一樣，都是既使用籌算，又使用珠算的著作；同時，都沿襲「九數」的分類傳統。《算學寶鑑》的卷1至卷6為預備知

1 明·王文素，《新集通證古今算學寶鑑》，抄本，藏北京圖書館。影印收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙》〈數學卷〉第2冊（鄭州：河南教育出版社，1993），頁337-971。

2 同註1，頁337。

3 同註1，頁338。

4 明·吳敬，《九章算法比類大全》，明弘治元年（1488）刻本，影印收入《中國科學技術典籍通彙》〈數學卷〉第2冊，頁5-333。

5 同註1，頁338。

6 同註1，頁338。

識；⁷卷 7、11、13、15、19、22、25、26、28 的開頭依次是方田、粟米、衰分、少廣、商功、均輸、盈不足、方程、句股等名目。這些名目以下（包括所在卷及以下諸卷）另有各種名目，卻都屬於分別與「九數」各項同類的問題；⁸卷 31-41 是開方問題。⁹這與《九章比類》的卷首是預備知識，卷 1-10 依次是方田、粟米、衰分、少廣、商功、均輸、盈不足、方程、句股、開方的結構¹⁰十分類似。數學史界對《九章比類》已有相當程度的研究，對《算學寶鑑》的瞭解卻比較膚淺。因為兩者有上述類似之處，人們通常將《算學寶鑑》與《九章比類》相提並論。¹¹近年，華印楮指出：《新集通證古今算學寶鑑》一書在明代許多珠算書中，水平是比較高的。但華氏僅限於乘除捷算法的研究。¹²

現僅就《算學寶鑑》解決面積問題的方法作些分析，並試圖與《九章比類》等的同類內容作一比較，以標定《算學寶鑑》在中國傳統數學著作中的地位，就教於同好。

二、王文素的「通證」與《九章算術》

明朝數學落後。在王文素之前，出現過不少數學著作，但大都粗製濫造，錯誤百出，正如王文素所指出的：

愚是以留心算學，手不釋卷三十餘年，頗諳乘除之路。嘗取諸家算書讀之，其間辭失旨者有之，問答不合者有之；歌訣包束不盡，定數不明，舍本逐末，棄源攻流，乘機就巧，法理不通，學者莫可適從，正猶迷人而指迷人也。又兼版簡模糊，謄書舛誤乎。愚者不能分別，智者弗與辨理，理者不肯盡心，以致算學廢弛。所以世人罕得精通，良可歎也。¹³

在王文素之前，景泰年間（1450-1456）金臺金來朋「有志改正，纔論數

7 同註 1，頁 341-342。

8 同註 1，頁 342-344。

9 同註 1，頁 344-345。

10 同註 4，頁 9-14。

11 錢寶琮，《中國數學史》（北京：科學出版社，1964），頁 138。又見《李儼錢寶琮科學史全集》（瀋陽：遼寧教育出版社，1998）第 5 卷，頁 153。

12 華印楮，《中國珠算史稿》（北京：中國財政經濟出版社，1987），頁 70-74。

13 同註 1，頁 338。

題」，但是也有不足之處。¹⁴因此，王文素立志改正諸家失誤。他說：

愚故不揣鄙陋，敢以醯雞井蛙之見，歷將諸籍所載題術，逐一〔鉤〕深探遠，細論研推，其所當者述之，誤者改之，繁者刪之，闕者補之，亂者理之，斷者續之。復增乘除圖草，定位式樣，開方演段，捷徑成術，編為〔拙〕〔訣〕歌，註以俗解。¹⁵

仔細考察《算學寶鑑》，並徵之以《九章比類》，我們認為，王文素上述說法，對別人的著作並非浮辭虛貶，對自己的著作亦是實事求是，言之有據的。

《算學寶鑑》在每個題目之後有「法」、「草」、「代術」，又有「古法」、「古法草」、「古代術」，以及「解」、「證」、「通證術」、「通證新法」、「新證術」、「比證」、「比證新題」、「新設題」、「新代術」等項。通過考察、比較各項的內容，我們認為，所謂「古法」、「古法草」、「古代術」等是漢、唐、宋、元時期的方法，「法」、「草」、「代術」等是當時流行的方法，而「解」、「證」、「通證術」、「通證新法」、「新證術」、「比證」、「比證新題」、「新設題」、「新代術」等則是王文素的補充與改正，反映了他自己的方法與思想。在這裏，王文素大量用到「證」字，這就是為什麼他把自己的書冠以「通證」二字；同時，《算學寶鑑》的大部分題目是他以前的著作中已有的，或收集來的，只有「比證新題」、「新設題」等項下的題目，是王文素為了說明自己的方法或思想而設計的，這就是為什麼他又在自己的書前冠以「新集」二字。至於為什麼有「證」、「通證」、「新證」、「比證」、「代術」等不同名目，它們之間有什麼區別，還有待進一步考察。

三、《算學寶鑑》與《九章算術》

王文素在《算學寶鑑》中多次提到《九章》，那麼王文素眼中的《九章》是不是我們通常所說的《九章算術》¹⁶呢？這個問題對瞭解明代數學是十分

¹⁴ 同註1，頁338。

¹⁵ 同註1，頁338。方括號中的字為抄本脫文，今補正；前為圓括號、後為方括號者，前為舛誤文字，後為校正文字；下同。

¹⁶ 郭書春匯校，《九章算術》（瀋陽：遼寧教育出版社，1990）。又，郭書春校點，《九章算術》，見《算經十書》（一）（瀋陽：遼寧教育出版社，1998，郭書春、劉鈍校點）。此二種校勘本，其前5卷均以南宋鮑澣之刻本為底本，其後4卷及劉徽序，前者以《永樂大典》的戴震輯錄本為底本，後者以楊輝本為底本。後者在前者基礎上又作了重校。

重要的。我們以《算學寶鑑》的面積部分為例剖析這個問題。

《算學寶鑑》的面積部分有 5 個題目被說成是《九章》的。一是「方田桑生中央」問，王文素說：「《九章》誤刊……」、「《九章》法曰：……不合問。證曰：《九章》之誤欠折半也。」¹⁷一是「眉田」問，王文素稱為「《九章》眉田」，引用了「《九章》法」，指出其題設是「信筆立題」。¹⁸一是「錠田」問，王文素說是「《九章》題」，並引用了「《九章》法」。¹⁹一是「三角田」問，王文素稱為「《九章》三角田」。²⁰一是「環田」問，王文素稱為「《九章》帶分子環田」，說《九章》「誤刊積徑」，又引出「《九章》誤答曰：……」。²¹稍知《九章算術》的人都知道，這 5 個題目中，只有帶分子環田問是《九章算術》的題目。就是這個題目，其文字與《九章算術》還有較大的出入，並且，王文素還把劉徽將「環而不通匝」的環田改成「通匝」後依周三徑一算出的環田面積，李淳風等進而算出的環田徑長，²²都誤作楊輝算出的。實際上，此題是楊輝的《田畝比類乘除捷法》²³中的，被吳敬採入《九章比類》〈方田〉的古問中。²⁴至於「方田桑生中央」、「眉田」、「錠田」、「三角田」等 4 問，則根本不是《九章算術》的，而是《九章比類》的題目。²⁵可見，在王文素的時代，《九章算術》已不在民間流傳，起碼王文素未能看到《九章算術》，也許也未能看到楊輝的《詳解九章算法》，²⁶而只能看到明代演繹《九章算術》的著作。這類著作，除吳敬的《九章比類》外，還有劉仕隆的《九章通明算法》（1424）、許榮的《九章詳註算法》9 卷（1478）、余進的《九章

17 同註 1，頁 443。

18 同註 1，頁 453。

19 同註 1，頁 454。

20 同註 1，頁 456。

21 同註 1，頁 465。

22 同註 16，分別見頁 198-199、12。

23 宋·楊輝，《田畝比類乘除捷法》，見李儼藏抄本《楊輝算法》。影印收入《中國科學技術典籍通彙》〈數學卷〉第 1 冊，頁 1079。

24 同註 4，頁 55。

25 同註 4，頁 61、67、70、67。

26 宋·楊輝，《詳解九章算法》，《衰分》（後半卷）、《少廣》凡一卷半存《永樂大典》中；《商功》（存約半卷）、《均輸》、《盈不足》、《方程》、《句股與纂類》凡約五卷半存《宜稼堂叢書》本中。分別影印收入《中國科學技術典籍通彙》〈數學卷〉第 1 冊，頁 1401-1427、949-1043。

詳通算法》(1483)等。²⁷可惜，後幾部著作都已失傳。那麼，王文素所謂的《九章》到底是哪部著作呢？為了回答這個問題，我們分析一下《算學寶鑑》卷1。

卷1中的大數名第〔二〕、小數名〔第三〕、度名第四、量名第五、衡名第六、九九合數第八、乘法起例第九、除法起例第十、學算總訣第十六、釋字第十七、啟義第十八、先賢格言〔第十九〕等名目，²⁸其內容都與《九章比類》卷首「乘除開方起例」中的同類內容²⁹在文字上完全相同或基本相同。而「九章名第一」解曰中引用「《九章》序」云：「方田、粟布、〔衰〕分不過乘除互換，人皆易曉。若少廣之截多益少，開平方圓，商功之修築堆積，均輸之遠近勞費，其法頗難。至於盈朒、方程、句股，題問深隱，法理難明。」³⁰這段文字在魏劉徽、南宋榮棨、鮑澣之、楊輝的關於《九章算術》的序或後序中是沒有的，而是吳敬的《九章算法比類大全序》中的文字。³¹這些事實無可辯駁地證明，王文素所謂的《九章》的內容，主要應源於吳敬的《九章算法比類大全》。但是，王文素在引用這些內容時，卻未提到吳敬及其《九章比類》。而王文素對提及他以前的學者及著作是從來不吝筆墨的。比如這裏提到許榮，序中還提到金來朋，全書更是多次提到楊輝。王文素還提到《推用算法》、《捷用算法》、《捷奇易明算法》、《縱橫算集》、《縱橫指南算法》等明代著作。³²至於前代的《五曹算經》、《乘除通變本末》等更是多次提到。可見，王文素未提到吳敬及其《九章比類》不是偶然的。值得注意的是：王文素在卷2「掌中定位數」節中引用了「《九章》袖中錦」：

法曰：寅位定實，逆數法錢，丑上得千萬，子上得百萬，亥上得十萬，戌上得萬，酉上得千，申上得百，未上得十，午上得一文，乃午上得實。首錢十萬，復順數回，未上得萬，申上得千，酉上得百，戌上得十，亥上得兩，子上得錢，丑上得分，寅上得釐。合問。³³

27 李儼，《明代算學書志》，《中算史論叢》第2集（北京：科學出版社，1955），頁86-89；又，《李儼錢寶琮科學史全集》第6卷，頁474-477。

28 同註1，頁356-359、361。

29 同註4，頁14-16。

30 同註1，頁355-356。

31 同註4，頁6。

32 同註27，頁89-90、478。

33 同註1，頁368。

與吳敬的《九章比類》「大除小」法中「亦於掌上」之下完全一致，³⁴亦未說引自《九章比類》的，而是在「《九章》袖中錦」諸字之下注曰：

金陵許榮，字孟仁，成化（百）〔間〕重編《九章算法》。³⁵

可見這是引自許榮《九章》的。許榮的書名叫《九章詳註算法》，而吳敬的《九章比類》的每卷都題作「九章詳註比類××算法大全」，許榮《九章》的書名簡直就是它的縮寫。可見，許榮的《九章詳註算法》就是吳敬《九章比類》的重編本，或許主要是刪去了吳敬《九章比類》中「比類」的內容而重編的。因此，王文素的所謂《九章》，或者既指吳敬的《九章比類》，又指許榮的《九章詳註算法》；或者王文素根本沒有看到過吳敬的《九章比類》，只是從許榮《九章》間接引用了吳敬《九章比類》的材料。筆者傾向於後者。無論如何，王文素的所謂《九章》，不是漢代張蒼等編定的《九章算術》，而是源於吳敬的《九章比類》。

四、《算學寶鑑》的面積問題

《算學寶鑑》關於面積的問題在卷 7、8、9、10，分田畝、諸田求積、圓田求積、弧田論積、里田相乘、積畝求里、諸田帶分子、忘長失闊、田求長闊、求田捷徑等 10 節。³⁶我們著重討論諸田求積、圓田求積、弧田論積三等節，即卷 7、8 的內容。因為這些內容最能反映王文素解決面積問題的方法和思想。至於以下六節，即卷 9、10 的內容，只是計算更複雜一些，沒有新的面積公式；而卷 7 的「田畝」節，只是給出了田畝的單位換算及算法口訣；我們不予討論。

（一）諸田求積

「諸田求積」節給出了 38 個平面直線圖形的面積解法，除了涵蓋《九章比類》的所有直線圖形的面積外，還給出了四廣田、五廣田、一尖五廣田、

³⁴ 同註 4，頁 27。

³⁵ 同註 1，頁 368。

³⁶ 同註 1，頁 435-479。

二尖五廣田等更複雜的直線圖形的面積求法。³⁷這些題目，除少數王文素已指明來源外，其餘的出處尚有待考察。不過同類的問題在宋、元、明時代是司空見慣的。王文素的貢獻在於他糾正了前人，尤其是吳敬的失誤。試舉幾例。

1. 三廣田

王文素將三廣平行而不等的圖形叫做三廣田，王文素先討論三廣等距的情形：

三廣田南頭九步，中廣十四步，北廣一十一步，長三十步，問為田幾何？

法曰：倍中廣，得二十八步。併入兩頭廣共四十八步。以四而一，得闊一十二步。

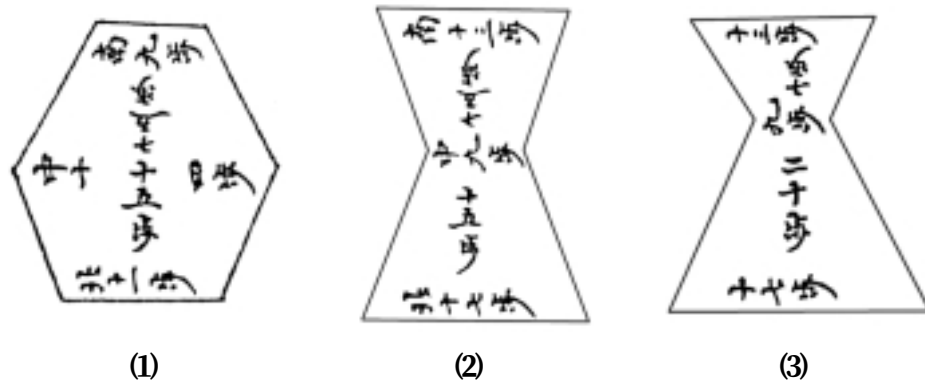
乘長三十步，得三百六十步為實。以畝法二百四十步除之，得答，合問。³⁸

這是中廣大於兩頭廣的情形，如圖一 (1)。還有中廣小於兩頭廣的情形，如圖一 (2)，南廣 13 步，中廣 9 步，北廣 17 步，中長 30 步，其方法與上完全相同。³⁹設一頭廣 a_1 ，中廣 a_2 ，另一頭 a_3 ，長 b ，其面積公式為

$$S = \frac{1}{4} [2a_2 + (a_1 + a_3)] b \quad \text{公式 [1]}$$

吳敬只將圖一 (2) 的圖形稱為三廣田，用公式 [1] 求解，⁴⁰是正確的。而

圖一 三廣田



³⁷ 同註 1，頁 437-446。

³⁸ 同註 1，頁 438-439。

³⁹ 同註 1，頁 439。

⁴⁰ 同註 4，頁 67。

將圖一(1)的圖形稱為船田，卻用 $S = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3)b$ 求其面積。⁴¹ 這顯然是承襲了《五曹算經》⁴²的錯誤。王文素引用了楊輝對《五曹算經》的批評：

楊氏曰：「三廣田乃小梯田一段，大梯田一段。二闊相抵，中廣正在當腰者，可用『倍中廣，加兩頭，乘長，四而一』之術。若中廣偏近一頭者，祇得作兩段梯田求之，庶不錯誤。」又謂：「《五曹算法》用『併三廣，正從乘而三除』，誤矣。」⁴³

楊輝的這些話見於《田畝比類乘除捷法》。⁴⁴ 不知為什麼吳敬對形如圖一(2)的三廣田採納了楊輝的意見，而對圖一(1)的三廣田卻堅持《五曹算經》的錯誤。王文素在這裏雖未直接批評吳敬，卻通過引用楊輝的話間接地批評了他。楊輝之後，元朝賈亨的《算法全能集》、⁴⁵ 安止齋的《詳明算法》⁴⁶ 對圖一(2)的三廣田都使用了楊輝的公式。

楊輝指出，公式[1]只適用於三廣等距的情形，而對三廣不等距的情形，如圖一(3)所示，則必須分成二塊梯田，用梯田公式分別求其面積，然後求二者之和解決之。王文素完全同意楊輝的意見，他說：「愚論此說甚當，故設一題於左較之。」他提出「新設證題」：假設三廣田，一頭廣13步，距中廣10步，中廣9步，另一頭廣17步，距中廣20步。按二塊梯田計算面積為370步，按公式[1]計算為360步，按《五曹算經》的公式為390步，只有前者是正確的。⁴⁷

2. 四不等田

四不等田是四邊不等的四邊形，如圖二(1)所示。《五曹算經》首先提出這類問題：

今有四不等田，東三十五步，西四十五步，南二十五步，北一十五步。問為田幾何？

設其四邊長分別是 a_1, b_1, a_2, b_2 ，《五曹算經》實際上是用公式 $S = \frac{1}{2}$

⁴¹ 同註4，頁67。

⁴² 北周·甄鸞，《五曹算經》，頁1-2，郭書春校點。見《算經十經》(二)(瀋陽：遼寧教育出版社，1998，郭書春、劉鈍校點)。

⁴³ 同註1，頁439。

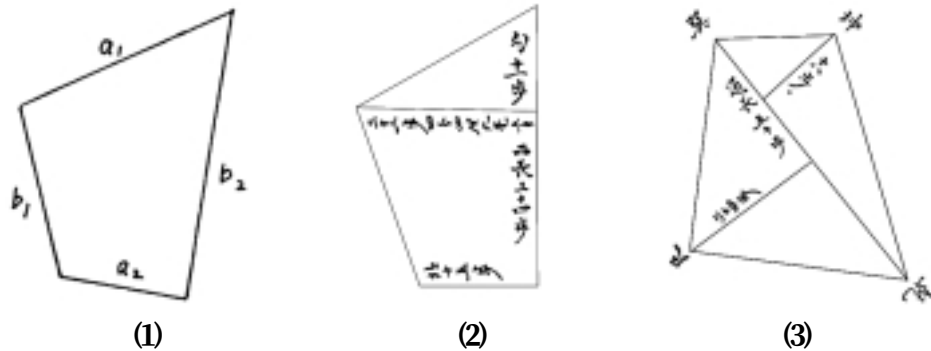
⁴⁴ 同註23，頁1082。

⁴⁵ 元·賈亨，《算法全能集》，影印收入《中國科學技術典籍通彙》〈數學卷〉第1冊，頁1342。

⁴⁶ 元·安止齋，《詳明算法》，同上註，頁1392。

⁴⁷ 同註1，頁439。

圖二 四不等田



$(a_1 + a_2) \times \frac{1}{2} (b_1 + b_2)$ 求解。⁴⁸ 楊輝認為《五曹算經》的解法是錯誤的。他說：

四圍四面不等者，必有斜步。然斜步豈可作正步相併？

他假設《五曹算經》的四不等田有一個角是直角，如圖二(2)，將其分成一個句 11 步、股 22.44995 步的句股形與一個一底 15 步、一底 22.44995 步，正從(高) 34 步的半梯形(即《九章算術》的邪田)，分別求出它們的面積，然後計算二者之和解決之。⁴⁹ 可是，《算法全能集》、⁵⁰《詳明算法》、⁵¹《九章比類》⁵²等元明著作無視楊輝對《五曹算經》的批評，仍沿襲上述錯誤公式。

王文素在引述了楊輝對《五曹算經》的批評之後，證曰：

楊氏用分兩段算四不等田，誠為有益。但所裁股步稍差。愚以所裁西長自乘，以減東斜長自乘，餘六十九步，以開平方法除之，得八步三分六毫六絲二忽，餘零不載，併入北闊十五步為股，共得二十三步三分六毫六絲二忽有奇，與所裁股數不合矣。蓋所裁句數稍多故也。⁵³

這是從北頭考慮，股長 = 15 步 + $\sqrt{35^2 - 34^2}$ 步 = 23.30662 步，與楊輝所認為的股為 22.44995 步不能相洽。王文素「復細算之」，該四不等田所分出的句

⁴⁸ 同註 42，頁 3。

⁴⁹ 同註 23，頁 1084-1085。

⁵⁰ 同註 45。

⁵¹ 同註 46。

⁵² 同註 4，頁 65。

⁵³ 同註 1，頁 442。

股形的句為 10.82 步，股為 22.532 步；所分出的半梯形西長（即高）34.18 步，南闊與股相同，北闊 15 步。⁵⁴

王文素認為，四不等田並不總是有一個直角，因此他又「證曰」：

右古四不等田，東、南二面雖斜，西北二面尚正，可用楊輝之法。若四面俱斜不等者，宜從兩角尖斜量為中長之法，其餘兩角至弦為闊，務令長闊抵處十字交正為則。下設題圖可驗。⁵⁵

他新設四不等田題如下：

四不等田一段，巽至乾斜長五十步〔為〕弦。坤角至弦一十八步，艮角至〔弦〕二十四步。問積併田各幾何？⁵⁶

王文素認為，為了解決四不等田乾坤巽艮的面積，不應去量它的四邊，而應量出對角線乾巽長，作為弦，再從另外兩角坤、艮向乾巽作垂線，變成四個句股形，或兩個三角形求解。他說：

觀此田勢，即是四段句股田。而句股相乘，亦是兩段偏半梭田，即是兩段偏圭田。⁵⁷

偏半梭田，或偏圭田的面積公式，是人們所熟知的。可以說，在中國數學史上，到王文素才成功地解決了四不等田的面積求法。

3. 方田桑生中央題

《孫子算經》、⁵⁸《五曹算經》⁵⁹提出「方田桑生中央」問題：（見圖三）

今有方田桑生中央，從角至桑一百四十七步。問為田幾何？

這兩部著作都用 $147 \text{步} \times 2 \times 5 \div 7$ 求出方田的一邊長，然後求其面積。設從角至桑的距離為 a ，《孫子算經》、《五曹算經》實際使用了 $S = (2a \times \frac{5}{7})^2$ ，其中 $\frac{5}{7}$ 是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的近似值，是木工們所常用的。楊輝批評《五曹算經》算法的不準確，他說：

《五曹》以二乘桑至隅，乃取田之全斜也。以五乘七除，即方五斜七之義，所以誤答前數。蓋方五斜七，僅可施於尺寸之間，其可用於百步之外。

⁵⁴ 同註 1，頁 442。

⁵⁵ 同註 1，頁 442。

⁵⁶ 同註 1，頁 442。

⁵⁷ 同註 1，頁 442。

⁵⁸ 郭書春校點，《孫子算經》卷中，同註 42，頁 12。

⁵⁹ 同註 42，頁 2-3。

此按《算學寶鑑》所引，⁶⁰與傳本《田畝比類乘除捷法》的文字⁶¹稍異。王文素同意楊輝的意見。吳敬《九章比類》也採納了楊輝的意見，沒有沿襲方五斜七，卻用 $S = (2a)^2$ 求解。⁶²王文素「證曰」：「《九章》之誤欠折半也。」⁶³其面積公式應為 $S = \frac{1}{2}(2a)^2$ 。顯然。它是由 $S = (2a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2})^2$ 化簡得出的。

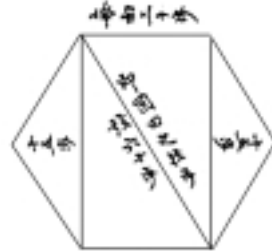
圖三 方田桑生中央



圖四 三角田



圖五 六角田



4.三角田

吳敬《九章比類》提出一個求三角田面積的問題，實際上是一個正三角形：「今有三角田，每面一十四步，問為田幾何？」如圖四。設每邊長 a ，吳敬所使用的面積公式是 $S = \frac{6}{7}a \cdot \frac{1}{2}a$ 。⁶⁴其係數 $\frac{6}{7}$ 是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的近似值。這個公式在理論上是正確的，但王文素認為數學著作中不應當用 $\frac{6}{7}$ 代替 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。他「證曰」：「直六斜七與方五斜七，並勿用。」他提出了新的方法：

新證術曰：置一面自乘，另置半面自乘，相減而又相乘，為實。開平方法除之。⁶⁵

這就是

$$S = \sqrt{\left[a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right] \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

⁶⁰ 同註 1，頁 443。

⁶¹ 同註 23，頁 1084。

⁶² 同註 4，頁 61。

⁶³ 同註 1，頁 443。

⁶⁴ 同註 4，頁 67。

⁶⁵ 同註 1，頁 456。

這是正確的，唯繁瑣了些，直接使用

$$S = \frac{a}{2} \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

即可。不知王文素為什麼寫得這麼複雜。

5. 六角田

六角田是正六邊形面積問題。吳敬《九章比類》提出六角田問題：「今有六角田，每面一十五步。問為田幾何？」（見圖五）「法曰：置每面自乘，以三乘之，以畝法除之，合問。」⁶⁶設六角田每邊長為 a ，吳敬的求積公式是 $S = 3a^2$ 。這個公式的錯誤是明顯的。王文素「證曰」：

古術以「每面自乘，三因」，是斜步作正步算之。⁶⁷

吳敬之所以犯這個錯誤，除了其數學水平低下外，很難得到合理的解釋。因為，計算正六邊形以至正 192 邊形的面積，早在西元 3 世紀劉徽《九章算術注》中就解決了。⁶⁸王文素認為：

觀此田勢，即是鼓田一段。又是箕田二段，而舌相連。又直一段居中，半梭田兩段居旁。又是六段圭田，而眾尖攢聚。凡求田積，如鼓田量算為便。⁶⁹

王文素在這裏提出了四種計算正六邊形面積的方法，而以鼓田公式計算最為方便。

王文素又提出了新的方法：

新證術曰：每面自乘，三因。另置一面半數，自乘。相乘為實。開平〔方〕法除之。⁷⁰

此即

$$S = \sqrt{3a^2 \times \left(\frac{3}{2}a\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$$

這個公式是正確的。它是怎麼得出的，值得進一步探討。在「每面自乘，三因」下王文素自注「即是面徑自之積」，似有訛誤文字。實際上，按六圭形計算，因其高為 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ ，可以直接算出第二個等號的算式。

⁶⁶ 同註 4，頁 67。

⁶⁷ 同註 1，頁 456。

⁶⁸ 同註 11，分別見頁 67、73。

⁶⁹ 同註 1，頁 456。

⁷⁰ 同註 1，頁 456。

(二) 圓田求積

討論圓田的面積，離不開圓周率。圓周率的研究是中國傳統數學的重要課題。《周髀算經》、《九章算術》等著作均使用周三徑一。漢劉歆（前 50-23）為王莽作銅斛，實際上使用 $\pi = 3.1547$ ，張衡（78-139）求出 $\pi = \sqrt{10}$ 。⁷¹《史記》張守節正義引蔡邕（132-192）云：「璣徑八尺，圓周二丈五尺而強也。」⁷²亦即 $\pi = \frac{25}{8}$ 。此率後來常被稱為璣璣率，它是如何求得的，不得而知。魏劉徽首次創造了求圓周率的科學方法，並求出了 $\pi = \frac{157}{50}$ 與 $\pi = \frac{3927}{1250}$ 兩個近似值，他還用前者修正了《九章算術》中與圓有關的面積、體積公式。⁷³ $\pi = \frac{157}{50}$ 常稱為徽率。南朝宋何承天（370-447）提出了相當於 $\frac{22}{7}$ 的圓周率。⁷⁴ 宋、齊祖冲之（429-500）將圓周率精確到 8 位有效數字，並將 $\pi = \frac{22}{7}$ 稱作約率，又提出密率 $\pi = \frac{355}{113}$ 。⁷⁵ 唐李淳風等注釋《九章算術》時將 $\pi = \frac{22}{7}$ 稱作密率，⁷⁶ 一直沿襲到宋、元、明的著作。宋元數學著作中應用最多的三個圓周率是 3, $\frac{157}{50}$, $\frac{22}{7}$ 。《算法全能集》、《詳明算法》等比較通俗的讀物只使用 3，而不使用另外兩者；水平比較高的《數書九章》、《詳解九章算法》、《楊輝算法》、《算學啟蒙》、《四元玉鑑》等則既使用 $\pi = 3$ ，也使用 $\frac{157}{50}$ 與 $\frac{22}{7}$ 。

饒有興味的是，明代吳敬的《九章比類》與王文素的《算學寶鑑》也符合這種分野。前者只使用 $\pi = 3$ ，而未提到徽率與所謂「密率」。王文素的《算學寶鑑》的「圓田求積」節則列出當時流傳的四個圓周率：

古率 周三徑一
密率 周二十二徑七
徽率 周一百五十七徑五十
璣璣 周二十五徑八

⁷¹ 同註 11，分別見頁 66，頁 72。

⁷² 張守節正義，《史記》〈五帝本紀〉（北京：中華書局，1959），頁 24。

⁷³ 郭書春，《古代世界數學泰斗劉徽》（濟南：山東科學技術出版社，1992），頁 234-242。國字修訂本（臺北：明文書局，1995），頁 235-242。

⁷⁴ 同註 11，分別見頁 87、95。

⁷⁵ 唐·魏徵等，《隋書》〈律曆志〉（北京：中華書局，1973），頁 388。

⁷⁶ 同註 16，分別見頁 190、7。

以及使用這四個圓周率求圓面積的各種公式，⁷⁷還有用這四個圓周率解決環田、火塘田、錢田等面積的方法。⁷⁸在求圓面積時使用四個圓周率的各自六的個公式中，有二個公式，「周徑相乘，四而一」與「半周半徑相乘」，都是一致的。他還比較了用古率與密率計算的結果，指出「與古法不合，其積為密率似合，智者詳」。⁷⁹

(三) 弧田論積

弧田術即弓形的面積算法，也是中國傳統數學的重要課題。《九章算術》提出弧田術是： $S = \frac{1}{2}(c+v)v$ ，其中 c 是弧田的弦， v 是其矢。劉徽證明了「此術不驗」，指出，在周三徑一的條件下，此「指驗半圓之弧耳。若不滿半圓者，益復疏闊」。他依句股鋸圓材之術，通過逐次割圓弧，提出了計算弧田密率的方法，⁸⁰如圖六(1)。劉徽的方法儘管理論貢獻極大，但對具體計算田地的面積，卻不實用。此後各家著作均不重視，南北朝及宋、元、明，仍使用《九章算術》的弧田術。王文素卻在劉徽之後再次批評了《九章算術》的方法，並提出了新的方法。他證曰：

弧田求〔積〕古術，用併弧矢，以半矢乘之，是合圓田周三徑一之數。愚嘗畫圖（前力）〔剪〕積補較，其積有差，須看周灣陡慢，弦矢短長，隨題消長而無定則法。假令弦抵矢二停者，即圓田之一半，宜用弦矢相乘，先得直田之積，依密率，以五十五乘直積，如七十而一，得弧田之積。若弦抵矢二停半者，以五十三乘直積；或抵三停者，以五十一乘直積；抵三停半者，以五十乘直積；抵四停者，以四十九乘直積。抵五停者，以四十八乘直積；或抵六、七停以上者，皆以四十七乘直積，通用七十而一除之，得積。雖非成術，庶免甚差。⁸¹

就是說，他通過對弧田圖形的剪補比較，如圖六(2)，提出了近似公式

$$S = kcv$$

其中 k 由 c, v 的比率決定，我們稱作弧田係數。具體說來，就是

$$c:v = 2:1 \quad S = \frac{55}{70} cv$$

⁷⁷ 同註 1，頁 446-447。

⁷⁸ 同註 1，頁 448-451。

⁷⁹ 同註 1，頁 448。

⁸⁰ 同註 16，頁 197-198、12。

⁸¹ 同註 1，頁 451。

$$c:v=2.5:1 \quad S=\frac{53}{70}cv$$

$$c:v=3:1 \quad S=\frac{51}{70}cv$$

$$c:v=3.5:1 \quad S=\frac{50}{70}cv$$

$$c:v=4:1 \quad S=\frac{49}{70}cv$$

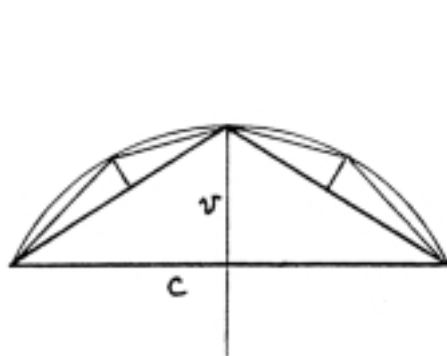
$$c:v=5:1 \quad S=\frac{48}{70}cv$$

$$c:v\geq 6:1 \quad S=\frac{47}{70}cv$$

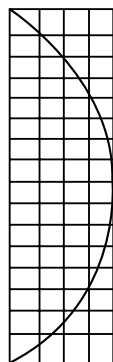
其中第一式為半圓的弧田，恰合 $\pi=\frac{22}{7}$ 。

王文素利用上述弧田公式考察了欖核田、牛角田、眉田、錠田等可以由弧田組合或分解成的圓形的面積。這些圓形的面積，有的在元代就引起了人們的注意，而明代吳敬的《九章比類》討論了所有這些圖形的面積，但是，都不得要領。而王文素則給出了較準確的方法。

圖六 弧田

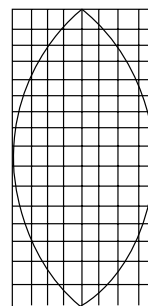


(1)



(2)

圖七 欖核田



1. 欖核田

欖核田如圖七所示。吳敬的《九章比類》的欖核田題目給出了此田的中長及兩弧長，其計算公式為 $S=\frac{1}{4}c^2$ ，其中 c 為中長，公式中沒用到弧長。⁸²

⁸² 同註4，頁71。

王文素指出了吳敬的錯誤。他證曰：

切論，欖核田求積古術只用中長自乘，如四而一，不合法理。愚謂此田寬肥者其積必多，狹瘦者其積必少，當以正中量長，當腰量闊為是。⁸³

他認為，欖核田是兩弧田相併連而成的：「觀此田形，即是弧田兩段而弦相連。」因而提出：「半闊較長，亦如前弧田法求之，得積。」⁸⁴具體說來就是：

新證術曰：以長〔闊〕相乘，得直田之積。另置半闊除長，得幾停，如弧田求之。⁸⁵

就是說，欖核田的求積公式為

$$S = kca$$

其中 k 為弦 c 與欖核田半闊 $\frac{1}{2}a$ 之比所決定的弧田係數， $\frac{1}{2}a$ 便是組成欖核田的兩弧田的矢。王文素的欖核田例題是：

欖核田一段，中長一十六步，腰闊八步，問積幾何？

顯然， $c:\frac{1}{2}a = 16:4 = 4:1$ ，查弧田係數， $k = \frac{49}{70}$ 那麼，此欖核田的面積為 $S = \frac{49}{70}ca = \frac{49}{70} \times 16 \times 8 = 89$ 步 6 分。而按吳敬的錯誤公式計算就是 64 步。⁸⁶ 差之遠矣。

2. 錠田

王文素認為，錠田是「圓田兩傍裁去兩段欖核田而餘者」。⁸⁷如圖八 (1)。

《九章比類》已經討論了錠田：

今有錠田正中長三十六步，兩頭各周二十七步，兩曲各二十七步，四面兩角相空徑二十四步。問為田幾何？

法曰：置正中長自乘，折半，以畝法而一，合問。⁸⁸

設錠田正中長為 b ，那麼吳敬的公式就是 $S = \frac{1}{2}b^2$ 。只用到了題目中的正中長，而未用到題目所給的兩頭周、兩曲周及空徑，顯然不合理。王文素首先指出，《九章比類》的例題假設四面兩角相空徑二十四步，「誤矣」。為什麼呢？此題假設「兩頭兩曲各周二十七步」，那麼空徑應是錠田所在的圓周所內

⁸³ 同註 1，頁 453。

⁸⁴ 同註 1，頁 452。

⁸⁵ 同註 1，頁 453。

⁸⁶ 同註 1，頁 452。

⁸⁷ 同註 1，頁 455。

⁸⁸ 同註 4，頁 70。

接的正四邊形的一邊。「愚以正中長自乘，折半，得六百四十八步。開平方除之，得二十五步五十一分步之二十二，即容方面也。」⁸⁹這是說，圓內接四邊形的一邊，即鉞田的空徑為 $\sqrt{\frac{1}{2} \cdot 36^2} = 25\frac{22}{51}$ 步，而不是 24 步。因此，吳敬的題設本身是矛盾的。

而且，在一般情況下，「或兩頭、兩曲周步不同，及寬肥狹瘦者，不可專用此術，須分段求之。」⁹⁰王文素的例題都給出了鉞田的正中長 d ，即鉞田所在圓的直徑，以及兩頭的橫實弦 c_1 ，及兩側的豎空弦 c_2 。如圖八 (2)，他給出的瘦鉞田是：

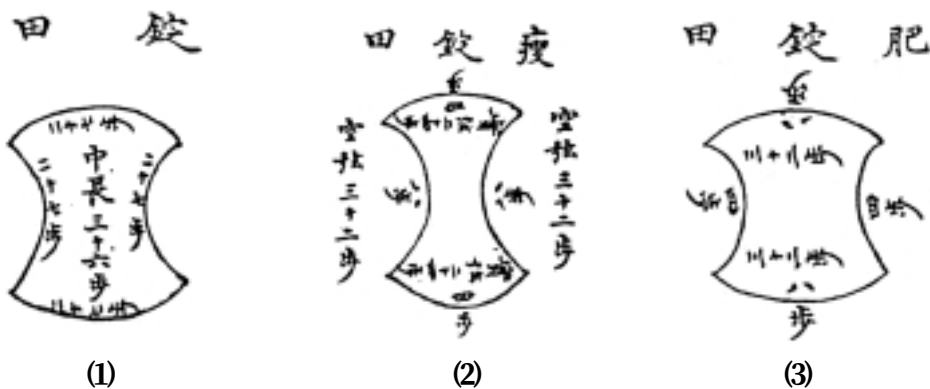
新設證題：假有鉞田正中通長四十步，兩頭橫實弦各二十四步，兩旁豎空弦各三十二步。問積幾何？

術曰：以橫豎二弦相乘為直田積。另求上、下弧田實積，併之。再另求兩旁（弦）

〔弧〕田虛積，減之。餘為鉞田積。⁹¹

這是說，王文素將鉞田看作中央一個直田（即長方形），兩頭加上兩個實弧田，兩旁除去兩個虛弧田而成的。設其面積為 S ，其直田的寬、長分別為實弦與虛弦，設其面積為 S_0 ；其一個實弧田的弦為實弦 c_1 ，矢 v_1 為正中長 d 與空弦 c_2 之差的一半： $v_1 = \frac{1}{2}(d - c_2)$ ，設其面積為 S_1 ；其一個虛弧田的弦為空弦 c_2 ，矢 v_2 為正中長 d 與實弦 c_1 之差的一半： $v_2 = \frac{1}{2}(d - c_1)$ ，設其面積為 S_2 。顯然：

圖八 鉞田



⁸⁹ 同註 1，頁 455。

⁹⁰ 同註 1，頁 455。

$$\begin{aligned}S_0 &= c_1 c_2, \\S_1 &= k_1 c_1 v_1, \\S_2 &= k_2 c_2 v_2, \\S &= S_0 + 2S_1 - 2S_2\end{aligned}$$

其 k_1 , k_2 分別為弧田係數。

在王文素的例題中，直田 $S_0 = c_1 c_2 = 32 \times 24 = 768$ 步； $v_1 = \frac{1}{2}(d - c_2) = \frac{1}{2}(40 - 32) = 4$ 步，那麼 $c_1 : v_1 = 24 : 4 = 6 : 1$ ， $k_1 = \frac{47}{70}$ ， $S_1 = k_1 c_1 v_1 = \frac{47}{70} \times 24 \times 4 = 64 \frac{16}{35}$ 步； $v_2 = \frac{1}{2}(d - c_1) = \frac{1}{2}(40 - 24) = 8$ 步，那麼 $c_2 : v_2 = 32 : 8 = 4 : 1$ ， $k_2 = \frac{49}{70}$ ， $S_2 = k_2 c_2 v_2 = \frac{49}{70} \times 32 \times 8 = 179 \frac{7}{35}$ 步；於是， $S = S_0 + 2S_1 - 2S_2 = 768$ 步 $+ 2 \times 64 \frac{16}{35}$ 步 $- 2 \times 179 \frac{7}{35}$ 步 $= 538 \frac{18}{35}$ 步。

王文素把上述這個銳田稱為瘦銳田。他又舉了一個肥銳田的例題，如圖八(3)，正中長 $d = 40$ 步，橫實弦 $c_1 = 32$ 步，豎空弦 $c_2 = 24$ 步。顯然，它的正中長與瘦銳田相同，唯將實弦與空弦對換。因此， $S_0 = 768$ 步， $S_1 = 179 \frac{7}{35}$ 步， $S_2 = 64 \frac{16}{35}$ 步，那麼， $S = S_0 + 2S_1 - 2S_2 = 768$ 步 $+ 2 \times 179 \frac{7}{35}$ 步 $- 2 \times 64 \frac{16}{35}$ 步 $= 997 \frac{17}{35}$ 步。

王文素指出，若用吳敬的方法，瘦銳田與肥銳田的面積均為 800 步，對前者太多，對後者則太少，「誤矣」。⁹²

3. 眉田

元《算法全能集》、⁹³《詳明算法》、⁹⁴明《九章比類》⁹⁵ 都有眉田問題，如圖九。設眉田上周 ℓ_1 ，下周 ℓ_2 ，徑 d ，這幾部著作的面積求法都是 $S = \frac{1}{2}(\ell_1 + \ell_2) \cdot \frac{1}{2}d$ 。王文素引用了《九章比類》的題目：

《九章》眉田上周四十九步，下周四十五步，徑十四步。

又引用了「《九章》法」，然後，王文素指出：

證曰：嘗用竹篾以寸代步較之，其徑不過四、五步而已，豈能容十四步哉？是信筆立題。

⁹¹ 同註 1，頁 455。

⁹² 同註 1，頁 455。

⁹³ 同註 45，頁 1342。

⁹⁴ 同註 46，頁 1393。

⁹⁵ 同註 4，頁 67。

王文素進而指出「其術亦未為當」，⁹⁶並提出了正確的新方法：

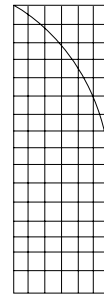
宜從兩角尖取直為弦，上周至弦為矢，補借弧田總算得數。另將虛借弧田求之，以減總數，餘即眉田之積。⁹⁷

這是把眉田看成兩個弧田之差，先算出兩個弧田的面積，再求其差，便是眉田面積。這種方法雖仍是求出近似值，但在丈量眉田的面積時是可行的，正如王文素自己所指出的：「如此，似免甚差。」⁹⁸

圖九 眉田



圖十 牛角田



4.牛角田

南宋楊輝，元賈亨、安止齋，明吳敬等都研究過牛角田，實際上是將「弧田當腰截斷者」。⁹⁹楊輝的題目是

今有牛角田，一段角長一十六步，口闊六步。問田幾何？¹⁰⁰

設牛角田所在的弧田的弦為 c ，矢為 v ，楊輝用 $S = \frac{1}{2} (\frac{1}{2} v + \frac{1}{2} c) v$ 計算其面積。顯然，這是由《九章算術》弧田術¹⁰¹得出的。《算法全能集》、¹⁰²《詳明算法》、¹⁰³《九章比類》¹⁰⁴中的牛角田與楊輝的牛角田不同，實際上是

⁹⁶ 同註 1，頁 453。

⁹⁷ 同註 1，頁 453。

⁹⁸ 同註 1，頁 453。

⁹⁹ 同註 1，頁 453。

¹⁰⁰ 同註 23，頁 1078-1079。

¹⁰¹ 同註 16，分別見頁 197、11。

¹⁰² 同註 45，頁 1342。

¹⁰³ 同註 46，頁 1393。

¹⁰⁴ 同註 4，頁 67。

將眉田從當腰截斷者，即半眉田，用 $S = \frac{1}{2}(\ell_1 + \ell_2) \cdot \frac{1}{2}d$ 求其面積，其中 ℓ_1, ℓ_2 是眉田的兩弧， d 是徑。而《九章比類》中的欖核田一角，¹⁰⁵ 實際上是楊輝書中的牛角田，給出正長（即半弦）與半角周。其解法莫明其妙，而且與同書中欖核田的解法相矛盾。王文素《算學寶鑑》仍用楊輝的牛角田題目，指出楊輝「誤刊一百一十四步」，給出正確答案五十七步。王文素認為其解法「與欖核田同術」，即「以半闊除長」，根據其比率決定弧田係數。¹⁰⁶

五、《算學寶鑑》在中國傳統數學著作中的地位

從上述對面積問題的分析中可以看出，就數學計算上力求精確與推理的嚴格化而言，《算學寶鑑》與《算法全能集》、《詳明算法》、《九章比類》等是有根本區別的。後三者中許多面積問題的算法，尤其是複雜的曲邊形及不規則圖形的算法，大都是錯誤的，正如王文素所批評的，是「乘機就巧，法理不通」。¹⁰⁷ 而王文素處理面積問題時，則繼承了傳統的出入相補方法。他不僅對直線形使用出入相補，更重要的是，在比較精確地解決了弧田的面積公式之後，他用出入相補方法解決了錠田、眉田等曲線形的面積，並用圖形的分割、拼合解決了欖核田、牛角田等曲線形的面積。劉徽注《九章算術》環田術時把圓環面積看成兩個圓的面積之差。¹⁰⁸ 王文素儘管沒有看到過劉徽注，但是，他解決宋元以來人們提出的，但幾百年間未正確解決的與弧田有關的曲線形的求積問題的思想與方法，與劉徽是相通的，是對中國傳統數學的貢獻。在明朝理論數學落後這個大背景下，王文素像吳敬、顧應祥等其他明朝數學家一樣，不懂增乘開方法、天元術、四元術等宋元數學的傑出創造，但是，他的《算學寶鑑》繼承了《楊輝算法》，並通過《楊輝算法》間接地繼承了《九章算術》及其劉徽注等算法精確、推理嚴謹的傳統，是值得表彰的。

中國傳統數學以理論聯繫實際為其重要特點，以解決人們生產生活中的數學問題為主要目的。這一特點與目的固然造成了中國傳統數學對理論的研

¹⁰⁵ 同註 4，頁 72。

¹⁰⁶ 同註 1，頁 453。

¹⁰⁷ 同註 1，頁 338。

¹⁰⁸ 同註 16，分別見頁 199、12。

究不像古希臘數學那樣重視（當然，絕不是像某些人所想當然的那樣，沒有理論與理論研究），卻也使中國傳統數學繞開了那些導致古希臘數學轉向的哲學悖論，繼續推進數學的發展。比如，中國哲學家對無窮小儘管也有「萬世不竭」¹⁰⁹與「不可斷」¹¹⁰的分野，但中國數學家如劉徽，沒有陷入「潛無窮小」與「實無窮小」的爭論，沒有像古希臘數學家那樣將無窮小排除在數學之外，卻進而將無窮小分割引入數學證明；¹¹¹劉徽也不考慮正方形的邊長與對角線（即 1 與 $\sqrt{2}$ ）是否有公度的問題，不但沒有導致像希臘數學家那樣將計算排除在外的後果，反而在開方不盡時，他繼續開方，「求其微數」，以十進分數逼近無理根。¹¹²同時，中國傳統數學受數字神秘主義的影響也較少（當然，不是完全沒有）。《九章算術》是中國傳統數學的最重要著作，它奠定了中國傳統數學的基本框架與特點，提出了大量抽象性公式與算法，使中國數學躍升到世界的前列。但是，也有一部分術文抽象性不夠，更有少數粗疏甚至錯誤的公式。在《九章算術》之後，為它作注，以及以它為楷模編纂新的數學著作，成為中國傳統數學著作的兩種最基本的形式。¹¹³這些著述在對算法的精確性與推理的嚴謹性上是有很大不同的。魏劉徽於西元 263 年撰《九章算術注》，以演繹推理為主要邏輯方法，全面論證了《九章算術》的公式與解法，同時糾正了《九章算術》的粗疏與錯誤，理論貢獻卓著。¹¹⁴遺憾地是，劉徽的思想與方法，除祖沖之的態度因《綴術》失傳不得而知外，沒有被後人繼承、發揚。就重視證明與數學理論研究而言，劉徽在中國傳統數學中可以說是獨樹一幟。而《算學寶鑑》或多或少地進行了論證，與劉徽的思想是一致的。其他的著作，大多只是重視算法的提出，而不給出推導或證明。

就所提出的算法而言，這些著作也有不同的分野。大多數著作，如《海島算經》、《孫子算經》、《張丘建算經》、《緝古算經》、《黃帝九章算經細草》、《數書九章》、《測圓海鏡》、《益古演段》、《詳解九章算法》、《楊輝

109 周·莊周，《莊子》〈天下〉，《莊子集釋》（北京：中華書局，1961），頁 1106。

110 《墨子》〈經說下〉，《二十二子》（上海：上海古籍出版社，1986），頁 260。

111 同註 73，分別見頁 221-267、221-266。

112 同註 11，分別見頁 70-71、77-78。

113 同註 73，分別見頁 108、105-106。

114 同註 73。

算法》、《算學啟蒙》、《四元玉鑑》等，繼承了《九章算術》的主流傳統，既重視算法的嚴謹，又重視實際應用，這些著作所反映的數學知識，可以稱為數學家的數學。當然，這些著作和作者的態度也有區別，比如《孫子算經》等中的術文抽象性不夠。而其他著作的術文則大都十分抽象。另外，如李治更重視高深數學的研究，並把數學看成讀書人的學問，憫悼當時數學「墮於市井沾沾之兒及夫荒村下里蚩蚩之民」；¹¹⁵ 楊輝、朱世傑等則整理總結民間的乘除捷算法，並編成口訣，推動了新的計算工具珠算盤的產生與發展、普及。¹¹⁶ 《算學寶鑑》應該是普及性的著作，但它算法嚴謹而抽象。也有一部分數學著作，則沿襲了《九章算術》粗疏甚至錯誤這一支流，並向不良的方向發展。《五曹算經》就是一個典型，它無視劉徽對《九章算術》使用周三徑一及其他錯誤公式的批評，仍沿用《九章算術》粗疏或錯誤的公式，甚至又提出一些違背數學原理的錯誤算法。如果說《九章算術》中的某些粗疏或錯誤公式是當時尚未找到正確的方法而不得不採用的近似算法而情有可原的話，那麼，《五曹算經》沿襲已被劉徽等糾正的《九章算術》的錯誤，又提出一些違背數學原理與實際的算法，則完全反映了作者數學水平的低下。《算法全能集》、《詳明算法》等則繼承了《五曹算經》的傳統，無視楊輝對《五曹算經》中錯誤算法的批評，沿襲了某些錯誤，又提出了一些毫無算理可言的算法。通過這一分析，《算學寶鑑》與《九章比類》在中國傳統數學史中的地位就十分清楚了。吳敬的《九章比類》是《五曹算經》、《算法全能集》、《詳明算法》等傳統的繼承者，它們當然採納了傳統數學的大量正確的算法，但是有不少的毫無算理可言的錯誤算法；而王文素的《算學寶鑑》則是《楊輝算法》的數學傳統的繼承者，它們都力求算理正確，算法嚴謹。

從這個角度，我們大體可以將中國主要的傳統數學著作分類如下表。
(見次頁)

這個分類不一定很準確。而且，這是就數學的理論水平而言，而不是就體例與貢獻而言。就貢獻而言，《算法全能集》、《詳明算法》等與《楊輝算法》、《算學啟蒙》等一樣總結民間乘除捷算法，對珠算的產生與普及作出了

115 元·李治，〈益古演段自序〉，《知不足齋叢書》本《益古演段》，影印收入《中國科學技術典籍通彙》〈數學卷〉第1冊，頁875。

116 同註11，分別見頁128-134、142-149。

算法》、《算學啟蒙》、《四元玉鑑》等，繼承了《九章算術》的主流傳統，既重視算法的嚴謹，又重視實際應用，這些著作所反映的數學知識，可以稱為數學家的數學。當然，這些著作和作者的態度也有區別，比如《孫子算經》等中的術文抽象性不夠。而其他著作的術文則大都十分抽象。另外，如李冶更重視高深數學的研究，並把數學看成讀書人的學問，憫悼當時數學「墮於市井沾沾之兒及夫荒村下里蚩蚩之民」；¹¹⁵ 楊輝、朱世傑等則整理總結民間的乘除捷算法，並編成口訣，推動了新的計算工具珠算盤的產生與發展、普及。¹¹⁶ 《算學寶鑑》應該是普及性的著作，但它算法嚴謹而抽象。也有一部分數學著作，則沿襲了《九章算術》粗疏甚至錯誤這一支流，並向不良的方向發展。《五曹算經》就是一個典型，它無視劉徽對《九章算術》使用周三徑一及其他錯誤公式的批評，仍沿用《九章算術》粗疏或錯誤的公式，甚至又提出一些違背數學原理的錯誤算法。如果說《九章算術》中的某些粗疏或錯誤公式是當時尚未找到正確的方法而不得不採用的近似算法而情有可原的話，那麼，《五曹算經》沿襲已被劉徽等糾正的《九章算術》的錯誤，又提出一些違背數學原理與實際的算法，則完全反映了作者數學水平的低下。《算法全能集》、《詳明算法》等則繼承了《五曹算經》的傳統，無視楊輝對《五曹算經》中錯誤算法的批評，沿襲了某些錯誤，又提出了一些毫無算理可言的算法。通過這一分析，《算學寶鑑》與《九章比類》在中國傳統數學史中的地位就十分清楚了。吳敬的《九章比類》是《五曹算經》、《算法全能集》、《詳明算法》等傳統的繼承者，它們當然採納了傳統數學的大量正確的算法，但是有不少的毫無算理可言的錯誤算法；而王文素的《算學寶鑑》則是《楊輝算法》的數學傳統的繼承者，它們都力求算理正確，算法嚴謹。

從這個角度，我們大體可以將中國主要的傳統數學著作分類如下表。
(見次頁)

這個分類不一定很準確。而且，這是就數學的理論水平而言，而不是就體例與貢獻而言。就貢獻而言，《算法全能集》、《詳明算法》等與《楊輝算法》、《算學啟蒙》等一樣總結民間乘除捷算法，對珠算的產生與普及作出了

¹¹⁵ 元·李冶，〈益古演段自序〉，《知不足齋叢書》本《益古演段》，影印收入《中國科學技術典籍通彙》〈數學卷〉第1冊，頁875。

¹¹⁶ 同註11，分別見頁128-134、142-149。

An Analysis of Area Problems in the *Suanxue Baojian*

Guo Shuchun

Abstract

Prior to the completion of the *Shuli jingyun* 數理精蘊 (Sum of Essential Mathematical Principles) in 1723, the *Suanxue baojian* 算學寶鑑 (Precious Mirror of Mathematics), written by Wang Wensu in the Ming Dynasty, was the largest Chinese mathematical work. Because it had never been published during the 400 years since it was written, there were few studies done on it. Generally, it was placed in the same category as the *Jiuzhang suanfa bilei daquan* 九章算法比類大全 (Classified Sum of Mathematical Methods in Nine Chapters of Mathematical Procedures). Relying on analysis of area problems in the *Suanxue baojian*, the author of this paper points out that Wang Wensu corrected some inaccurate formulas contained in the *Jiuzhang suanfa bilei daquan*. Overall, the *Suanxue baojian* is characterized by accurate calculating methods and rigorous inference procedures. Therefore, in the classification of traditional mathematical works, the *Suanxue baojian* can be considered a descendent of the rigorous traditions of such works as *Yang Hui suanfa* 楊輝算法 (Yang Hui's Mathematical Methods), while the *Jiuzhang suanfa bilei daquan* is more in line with less exacting works like the *Wucaosuanjing* 五曹算經 (Mathematical Manual of the Five Government Departments).

Key Words: Wang Wensu 王文素, *Suanxue baojian* 算學寶鑑, *Jiuzhang suanfa bilei daquan* 九章算法比類大全, *Yang Hui suanfa* 楊輝算法, area problem